UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CENTRE DE RECHERCHE SUR LES TRANSPORTS

MÉMOIRE D'ÉTUDIANT

CASE POSTALE 6128, SUCCURSALE A, MONTRÉAL, QUÉBEC, H3C 3J7

CRT-591

UN MODÈLE DE PLANIFICATION DES RÉSEAUX DE DISTRIBUTION D'ÉNERGIE ÉLECTRIQUE

par

Abdelhamid Benchakroun

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures en vue de l'obtention du grade de Philosophiae Doctor (Ph.D.) en informatique, dirigée par Jacques Ferland et Robert Cléroux.

Cette recherche a été rendue possible grâce à une subvention du C.R.S.N.G. (G1793) et du F.C.A.R. (87AS2438).

Cette étude a été publiée grâce à une subvention du fonds F.C.A.R. pour l'aide et le soutien à la recherche.

Université de Montréal

Centre de recherche sur les transports - Publication #591

Département d'informatique et de recherche opérationnelle - Publication #661

Juin 1988

Dépôt légal - 3e trimestre 1988

SOMMAIRE

Dans cette thèse, nous considérons le problème de la planification de la distribution d'énergie électrique.

Nous avons élaboré un modèle mathématique détaillé et représentant les caractéristiques fondamentales d'un réseau radial de distribution électrique.

Dans l'objectif, nous tenons compte des coûts d'installation et d'entretien des équipements (postes, lignes et régulateurs de tension) ainsi que des coûts dûs aux pertes de puissance dans les lignes.

En plus des contraintes classiques, des contraintes spécifiques aux chutes de tension dans les lignes sont considérées dans le modèle.

Contrairement aux modèles déjà existants, nous avons construit notre modèle en introduisant le concept *d'utilisation* d'une connexion à une période donnée au lieu du concept habituel de *construction* d'une connexion à une période donnée. L'introduction de ce concept permet, d'une part, de construire un modèle plus raffiné et d'autre part, de corriger d'éventuelles aberrations qui auraient pu se trouver dans le réseau initial.

Le problème que nous obtenons est un problème de programmation non linéaire impliquant des variables continues et des variables entières. Jusqu'à présent, les spécialistes dans le domaine se sont contentés d'aborder la non linéarité du problème en approximant les parties non linéaires par des fonctions linéaires par morceaux. Pour notre part, nous avons construit et démontré des théorèmes qui nous ont permis d'obtenir un problème complètement linéaire et, de surcroît, équivalent à notre problème original.

La nature du problème, constitué d'une composante investissement (les équipements) et d'une composante gestion (le flot de puissance), nous a incité à opter

pour la méthode de décomposition de Benders généralisée comme approche de résolution. Par soucis de rigueur, nous avons démontré que notre modèle vérifiait toutes les conditions théoriques requises par la méthode. D'autre part, cette approche nécessite, entre autre, la construction d'une solution initiale réalisable. Nous avons donné à cette question toute son importance en proposant une façon d'étendre le réseau initial de façon à obtenir une "bonne solution réalisable" et avons mentionné d'autres idées pour développer d'autres approches constructives. Dans notre étude de cette question, nous avons été confrontés à un problème de flot à coût minimum avec contraintes de radialité auquel nous avons apporté deux méthodes de résolution, l'une heuristique et l'autre exacte.

Rappelons enfin, que la méthode de Benders généralisée consiste à décomposer le problème original en deux problèmes plus simples: le sous- problème et le problème maître. Ce dernier est traité par une approche de relaxation et fait appel au sous-problème pour ajuster la solution du problème relaxé. La circulation de l'information entre le problème maître relaxé et le sous-problème nécessite la résolution du sous-problème, la génération des contraintes de coupes et enfin la résolution du problème maître relaxé. En exploitant les propriétés du modèle, nous avons montré que le sous-problème a une structure telle que sa résolution est triviale. Nous avons également proposé des méthodes simples pour générer les coupes et enfin nous avons utilisé le logiciel ZOOM/XMP pour résoudre le problème maître relaxé.

Les résultats que nous obtenons sont encourageants et ouvrent plusieurs horizons pour des recherches futures.

A ma fille Mounia,
à ma mère
et à la mémoire de
mon père et de mes frères
Rachid et Salaheddine.

TABLE DES MATIERES

Sommaire

Introduction 1

Chapitre I: Principales approches connues 6

1.1 Introduction 6

1.2 "Optimal planning of power networks using mixed-integer programming" (Adams) 7

1.3 "Computer-aided planning of distribution substation and primary feeders" (ElKady) 11

1.4 Autres approches 13

Chapitre II: Construction du modèle 15

2.1 Définitions et notations 16

2.2 Définition de la fonction économique 22

2.3 Définition des contraintes 25

2.4 Le modèle 29

Chapitre III: Approche de résolution: Méthode de Benders généralisée et application au modèle de la planification 32

3.1 Motivation 32

3.2 Méthode de Benders généralisée 33

3.3 Application au modèle de planification de la distribution 39

3.4 Résumé 50

Chapitre IV: Construction d'une solution initiale réalisable 53

4.1 Construction du réseau de ligne 54

4.2 Réalisabilité du réseau 68

4.3 Autres méthodes 70

Chapitre V: Résolution du sous-problème et détermination des coupes 73

5.1 Expression et propriétés du sous-problème 73

5.2 Résolution du sous-problème 76

5.3 Détermination de la coupe dans le cas où $(SP.\bar{y})$ est réalisable 77

5.4 Détermination de la coupe dans le cas où $(SP.\bar{y})$ est non-réalisable 83

5.5 Organigramme général pour l'exploitation du sous-problème 95

Chapitre VI: Transformation et résolution du problème maître 96

6.1 Transformation du problème maître 98

6.2 Méthode de résolution du problème maître 104

6.3 Algorithme général pour la résolution du modèle de la planification 108

Chapitre VII: Expérimentation 112

7.1 Stratégie pour accélérer la recherche d'une solution du problème maître 113

7.2 Recherche d'une solution sans circuits 115

7.3 Intervention de l'usager 115

7.4 L'expérimentation 116

7.5 Conclusion 120

Conclusion 121

Annexe A: Une méthode de résolution du problème d'alimentation des points de charge 123

A.1 Application numérique de l'algorithme SOLREA 124

A.2 Algorithme exact 127

Annexe B: Données pour les exemples numériques 150

Annexe C 155

Bibliographie 157

Remerciement

TABLE DES TABLEAUX

Tableau 1.2: Structure du modèle 10

Tableau 7.1: Résultats avec solution initiale 1 117

Tableau 7.2: Résultats avec solution initiale 2 118

Tableau 7.3: Résultats avec régulateurs 119

Tableau 7.4: Résultats avec heuristiques 120

Tableau A.1: Données 124

Tableau B.1: Distances 151

Tableau B.2: Demandes 151

Tableau B.3: Coûts et capacités des tranformateurs 151

Tableau B.4: Coût-capacité-réactance et résistance des conducteurs 151

Tableau B.5: Coûts régulateurs et pertes de puissance 151

TABLE DES FIGURES

Figure 1.1: Approximation du coût des pertes de puissance 9

Figure 1.2: Relation flot-impédance 12

Figure 2.1: Exemple de circuit 28

Figure 5.1: Organigramme pour déterminer les relations reliées aux arcs 81

Figure 5.2: Bornes inférieures heuristiques et théoriques 83

Figure A.1: Solution heuristique 127

Figure A.2: Arbre de recherche 148

Figure A.3: Solution optimale 149

Figure B.1: Réseau des arcs admissibles 152

Figure C.1: Puissances, active réactive et apparente 155

INTRODUCTION

Dans cette thèse, nous considérons le problème de la planification de la distribution d'énergie électrique qui peut se formuler comme suit:

Etant donné le réseau de distribution électrique actuel (i.e le réseau tel qu'il existe à la période t=0), et supposant que la demande des abonnés, actuels ou futurs, est connue pour chacune des périodes t=1,2,...,T, il s'agit alors de déterminer la meilleure stratégie qui permettrait d'étendre le réseau de façon à satisfaire la demande tout en minimisant les coûts impliqués.

Avant d'expliciter davantage le problème, et afin de faciliter la compréhension, nous donnons ci-dessous une description sommaire d'un réseau électrique. Les grandes étapes de l'exploitation d'une entreprise fournissant l'électricité à sa clientèle sont la génération, le transport et la distribution. La génération consiste à produire, grâce à des centrales, l'énergie requise. Le réseau de transport, quant à lui, conduit cette électricité des centrales aux postes de distribution près des centres de consommation. Finalement, le réseau de distribution a pour fonction d'alimenter les abonnés à partir des postes de distribution.

Dans notre étude, nous considérons uniquement cette dernière composante qui sera prise comme une entité à part entière.

Si on laisse de côté les appareils de protection, un réseau de distribution peut être vu comme un ensemble d'arborescences dont les racines sont des postes (les sources) et les noeuds sont des points de charge (i.e des points du réseau où il y a consommation d'énergie par des abonnés). Les arêtes des arborescences sont des conducteurs qui servent à transporter la puissance d'un point à un autre. On trouvera, également, en certains points de charge, des régulateurs de tension qui servent à contrôler le voltage.

Les postes de distribution sont composés de transformateurs de différentes capacités. Le nombre et la capacité de ces transformateurs sont déterminés par la demande que doit satisfaire le poste où ils sont installés. De même, les lignes sont des conducteurs dont le type dépend du flot de puissance transporté par cette ligne.

Revenons maintenant au problème de la planification. Ce dernier est très complexe car sa résolution nécessite le traitement simultané de deux gros problèmes, un problème de "design" de réseau et un problème de choix d'équipement.

Le problème de "design" consiste à trouver une configuration qui permettrait d'alimenter tous les points de charge. Le problème d'équipement, quant à lui, consiste à choisir le type d'équipement (conducteur, transformateur, régulateur) qui permettrait de fournir ou d'écouler la puissance requise. Pour chacun des deux problèmes, le nombre d'alternatives est considérable. Dans ce contexte, l'utilisation des modèles analytiques et des techniques de programmation mathématique devient nécessaire.

Au cours des deux dernières décennies, le problème de la planification de la distribution a fait l'objet de plusieurs recherches, comme en témoigne l'abondance de la littérature dans ce domaine. Mais, la plupart des modèles proposés sont des modèles très simplifiés de la réalité et ne tiennent compte que d'un aspect particulier du problème. Même quand les modèles sont plus élaborés, d'importantes simplifications interviennent alors au niveau de la résolution.

Pour notre part, nous avons construit un modèle reflètant le plus fidèlement possible la réalité d'un réseau de distribution. Dans l'objectif, nous tenons compte du coût d'installation et d'entretien des équipements (transformateurs,

conducteurs et régulateurs) ainsi que des coûts des pertes de puissance dans les lignes. Egalement, en plus des contraintes classiques, des contraintes spécifiques aux chutes de tension dans les lignes sont considérées dans le modèle.

Contrairement aux modèles déjà existants, nous avons construit le nôtre en introduisant le concept *d'utilisation* d'une connexion à une période donnée au lieu du concept habituel de *construction* d'une connexion à une période donnée. L'introduction de ce concept permet, d'une part, de construire un modèle plus raffiné et d'autre part, de corriger d'éventuelles aberrations qui auraient pu se trouver dans le réseau initial.

Comme on pouvait s'y attendre, le problème obtenu est un problème de programmation non linéaire impliquant des variables continues et des variables entières. La résolution d'un tel problème est pour le moins très difficile. Jusqu'à présent, les spécialistes dans le domaine se sont contentés d'aborder la non linéarité du problème en approximant les parties non linéaires par des fonctions linéaires par morceaux. Pour notre part, nous avons construit et démontré des théorèmes qui nous ont permis d'obtenir un problème complètement linéaire et, de surcroît, équivalent à notre problème original.

La nature du problème, constitué d'une composante investissement (les équipements) et d'une composante gestion (le flot de puissance), nous a incité à opter pour la méthode de Benders généralisée comme approche de résolution. Rappelons que cette méthode consiste à décomposer le problème original en deux problèmes plus simples: le sous-problème et le problème maître. Ce dernier est traité par une approche de relaxation et fait appel au sous-problème pour ajuster la solution du problème maître relaxé. La circulation de l'information entre le sous-problème et le problème maître relaxé nécessite la construction d'une solution initiale réalisable, la résolution du sous-problème, la génération des contraintes de coupe et enfin la résolution du problème maître relaxé. Par soucis de rigueur, nous démontrons dans un premier temps, que notre modèle vérifie toutes les conditions théoriques requises par la méthode. En second lieu, nous proposons une manière d'étendre le réseau initial de façon à obtenir une "bonne solution réalisable" et nous mentionnons d'autres idées pour développer

d'autres approches constructives. Signalons que dans notre étude de cette question, nous avons été confronté à un problème de flot à coût minimum avec contraintes de radialité que nous avons résolu par une méthode heuristique puis par une méthode exacte. Finalement, en exploitant des propriétés du modèle, nous montrons que le sous-problème a une structure telle que sa résolution est triviale. Nous proposons également des méthodes simples pour générer les coupes et enfin nous utilisons le logiciel ZOOM/XMP pour résoudre le problème maître relaxé.

Voici maintenant un aperçu de la façon dont cette thèse est structurée.

Le premier chapitre est consacré à un survol de la littérature déjà existante. On peut ainsi voir les principales approches utilisées dans le domaine.

Le deuxième chapitre est essentiellement consacré à la construction du modèle. Après avoir défini les paramètres et les variables du problème, nous construisons la fonction économique et déterminons les contraintes du modèle.

Dans une partie du chapitre trois, nous donnons un bref exposé de la méthode de décomposition de Benders généralisée (Geoffrion (1972)). Dans une deuxième partie, nous construisons un modèle équivalent au modèle original et dans lequel les contraintes sont linéaires. Finalement, dans une troisième partie, nous démontrons que notre problème vérifie toutes les conditions théoriques requises pour l'application de la méthode de Benders généralisée.

Dans le quatrième chapitre, nous décrivons les différentes étapes pour construire une solution initiale réalisable.

Dans le cinquième chapitre, nous traitons tous les aspects du sous-problème. Ainsi, après avoir démontré que le sous-problème possédait au plus une solution réalisable, nous proposons une méthode pour trouver cette solution si elle existe. Nous donnons ensuite, un moyen pour déterminer et évaluer les coupes qui seront ajoutées dans le problème maître. Dans le chapitre six, nous construisons un problème linéaire, équivalent au problème maître et nous proposons une méthode pour le résoudre.

Finalement, on trouvera dans le chapitre sept, les tests numériques que nous avons effectués pour vérifier la validité de l'approche que nous avons choisie.

CHAPITRE I

PRINCIPALES APPROCHES CONNUES

1.1 Introduction

Au cours des deux dernières décennies, plusieurs techniques ont été proposées pour la résolution du problème de la planification de la distribution d'énergie électrique. Mais, compte tenu de la complexité du problème, la plupart des approches se limitent à l'étude d'un aspect particulier de ce dernier.

Parmi les approches les plus fréquemment rencontrées, on en distingue particulièrement trois.

La première se limite à modéliser les postes et, le problème consiste alors à déterminer le site et la capacité des postes futurs ainsi que la possibilité d'extension de la capacité des postes existants. (Voir à ce sujet Crawford et al. (1975), Masud (1979) et Thompson et al. (1981))

La deuxième est une modélisation du réseau de ligne et consiste à déterminer les connexions entre points de charge, le type de conducteur et le flot de puissance circulant dans les lignes. (Voir à ce sujet Adams et Laughton (1974), Wall et al. (1979) et Ponnavaikko et al. (1982)).

La troisième est une approche plus globale et tient compte, simultanément des deux aspects précédents. (Voir à ce sujet Sun et al 1982, Fawzi et al (1983) et Elkady (1984)). Mais, les auteurs qui ont choisi cette dernière approche, l'ont fait au prix d'importantes simplifications soit au niveau de la construction du modèle soit au niveau de la résolution.

La littérature dans le domaine étant très abondante, nous nous limiterons, dans ce chapitre, aux publications qui nous ont parues les plus intéressantes. Nous nous attarderons plus particulièrement sur les articles d'Adams et Laughton (1974) et Elkady (1984). Ce choix n'est pas délibéré et vient du fait que les premiers font figure de pionniers dans le domaine en proposant un modèle de programmation linéaire qui est resté longtemps le modèle mathématique le plus détaillé pour ce problème. Quant au modèle que propose Elkady (1984), il reste, jusqu'à présent, le plus raffiné.

1.2 "Optimal planning of power networks using mixed-integer programming" (Adams & Laughton (1974))

Dans cet article, les auteurs proposent un modèle de programmation linéaire mixte où les coûts impliqués sont les coûts d'installation de lignes et les coûts attachés aux pertes de puissance. Les contraintes considérées dans le modèle, sont les contraintes de conservation de flot, de capacité des conducteurs et des contraintes supplémentaires spécifiques aux circuits électriques.

La construction du modèle se fait en deux étapes.
Dans un premier temps, seuls les coûts fixes sont modélisés.

Ainsi, si l'on désigne par

k_{jt}: le coût de construction de la connexion j à la période t,

δ_{jt}: la variable 0-1 indiquant la construction ou la non construction de la connexion j à la période t,

x_{jt}: le flot de puissance circulant dans la ligne j, pendant la période t,

m : le nombre de connexions possibles,

T : le nombre de périodes,

I : l'ensemble des postes,

J : l'ensemble des points de charge,

B(i): l'ensemble des connexions ayant i comme extrémité, alors ;

le modèle s'écrit:

$$Min\ c = \sum_{j=1}^{m} \sum_{t=1}^{T} k_{jt}\, \delta_{jt}$$

sujet à

$$\sum_{j \in B(i)} a_{ijt}\, x_{jt} = d_{it} \quad , \quad i \in J \tag{1.1}$$

$$\sum_{j \in B(i)} -a_{ijt}\, x_{jt} = s_{it} \quad , \quad i \in I \tag{1.2}$$

$$x_{jt} - M_j \sum_{\tau=0}^{t} \delta_{j\tau} \leq 0 \tag{1.3}$$

$$x_{jt} \geq 0$$

où

$$a_{ijt} = \begin{cases} 1 \text{ } \textit{si le flot circulant dans la ligne j, pendant la période t,} \\ \quad \textit{entre dans le noeud i} \\ -1 \text{ } \textit{si le flot circulant dans la ligne j, pendant la période t,} \\ \quad \textit{sort du noeud i} \end{cases}$$

M_j est une borne supérieure sur le flot pouvant circuler dans la ligne j,

d_{it} est la demande au point de charge i, à la période t,

s_{it} est la capacité du poste i, à la période t.

Pour inclure le coût des pertes de puissance dans les lignes, les auteurs expriment ce dernier de façon quadratique en fonction du flot de puissance pour ensuite l'approximer par une fonction linéaire par morceaux. (Voir figure 1.1)

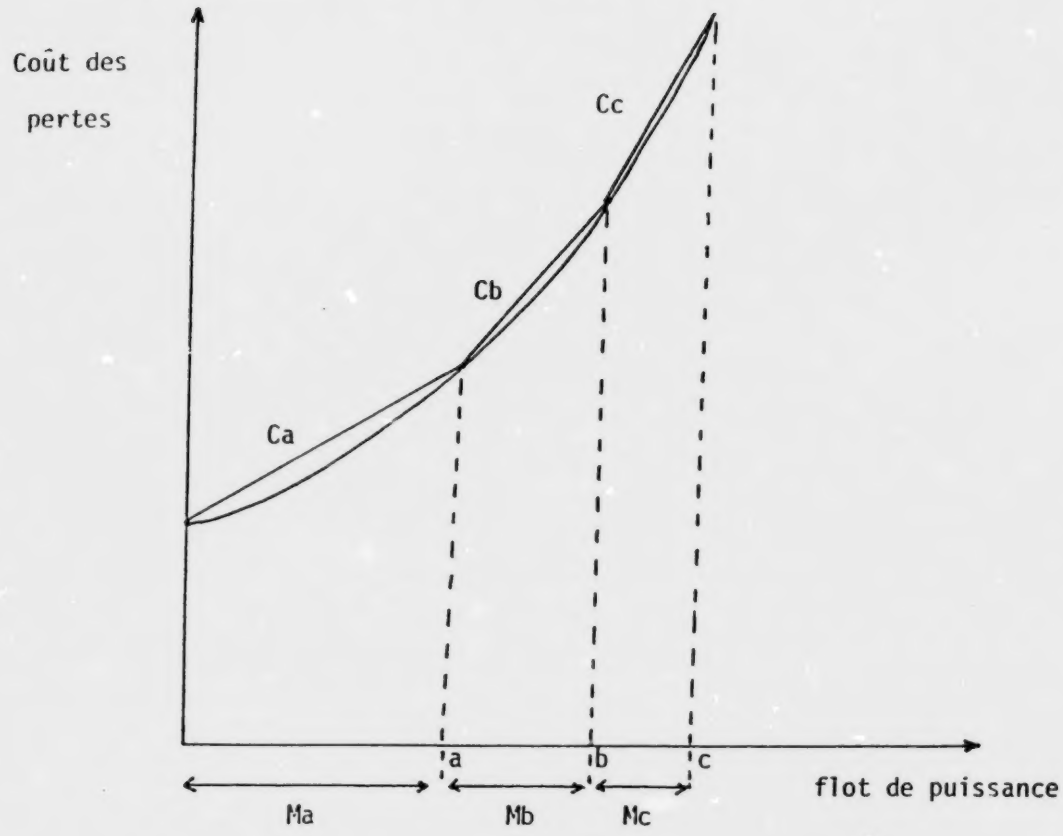


Figure 1.1: Approximation du coût des pertes de puissance

Ainsi, en omettant l'indice de la période, le coût des pertes de puissance dans la ligne j est donné par l'expression:

$$c_{aj}\, x_{aj} + c_{bj}\, x_{bj} + c_{cj}\, x_{cj}$$

et la contrainte (1.3) est remplacé par:

$$x_{aj} - M_{aj}\, \delta_j \leq 0$$

$$x_{bj} - M_{bj}\, \delta_j \leq 0$$

$$x_{cj} - M_{cj}\, \delta_j \leq 0\ .$$

Le tableau 1.2 résume la structure de ce modèle pour un problème impliquant un horizon de trois périodes.

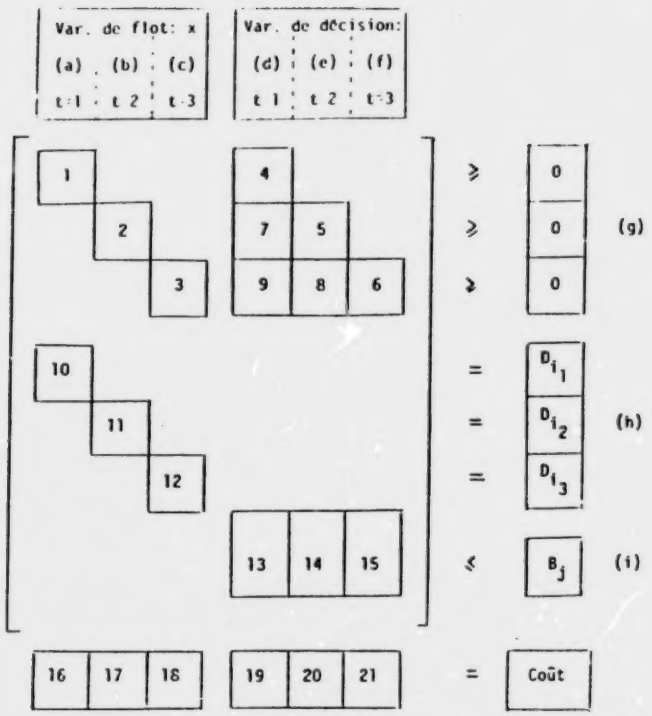


Tableau 1.2: Structure du modèle

Les colonnes a, b et c représentent les coefficients des variables continues de flot de puissance pour les périodes 1, 2 et 3,

les colonnes d, e, f représentent les coefficients des variables de décision, δ, pour les périodes 1, 2 et 3,

les contraintes g sont les bornes sur les flots de puissance dans les arcs du réseau de distribution,

les contraintes h représentent les équations de conservation de flot,

les contraintes i correspondent à des contraintes physiques,

les blocs 16, 17 et 18 représentent les coûts variables (pertes de puissance dans les

lignes, entretien des lignes) pour chacune des périodes 1, 2 et 3; et enfin, les blocs 19, 20 et 21 correspondent aux coûts fixes pour des périodes 1, 2 et 3.

Pour trouver une solution à ce problème, les auteurs utilisent un logiciel de programmation linéaire mixte qu'ils appliquent à des réseaux de petite taille (un poste et quelques points de charge).

Il est clair que ce modèle ne représente que très partiellement la réalité d'un réseau de distribution d'énergie électrique. En effet, les contraintes de chutes de tension dans les lignes, ainsi que les contraintes de radialité sont ignorées. De plus, seul le réseau de ligne est modélisé et le problème se rapportant aux postes est laissé de côté.

D'autre part, l'approximation linéaire du coût des pertes de puissance n'est "acceptable" (en ce sens que l'écart entre la solution théorique et la solution après approximation, est raisonnable) que si la subdivision utilisée est assez fine, ce qui implique l'introduction d'un nombre élevé de variables 0-1 dans le modèle. Le problème peut alors atteindre rapidement une trop grande taille et ainsi limiter l'application de la méthode à des réseaux de petite dimension.

Notons, enfin, que ces critiques n'enlèvent rien au mérite d'Adams et Laughton qui ont été les premiers à donner une formulation mathématique détaillée pour ce problème. De plus leur modèle a servi de point de départ à une formidable recherche dans le domaine.

1.3 "Computer-aided planning of distribution substation and primary feeders" (Elkady 1984)

Dans cet article, Elkady, même s'il s'inspire beaucoup de la méthode développée par Adams et Laughton, propose un modèle plus global et plus raffiné.

En plus de modéliser les coûts fixes et variables associées aux postes et aux lignes, il inclut dans son modèle les contraintes de chute de tension et tient compte implicitement de la radialité du réseau.

Pour assurer la linéarité du problème, l'auteur se voit contraint d'utiliser une approximation linéaire pour les coûts engendrés par les pertes de puissance dans les lignes. La technique étant identique à celle utilisée par Adams et Laughton.

D'autre part, les chutes de tension étant fonction du flot et du type de conducteur (impédance), les contraintes correspondantes sont non linéaires. Pour contourner cette difficulté, Elkady suppose que l'on dispose d'un ensemble standard de types de conducteurs correspondant à différents niveaux du flot. Ainsi, la relation, entre le flot de puissance et l'impédance, peut être représentée par la figure 1.2 ci-dessous

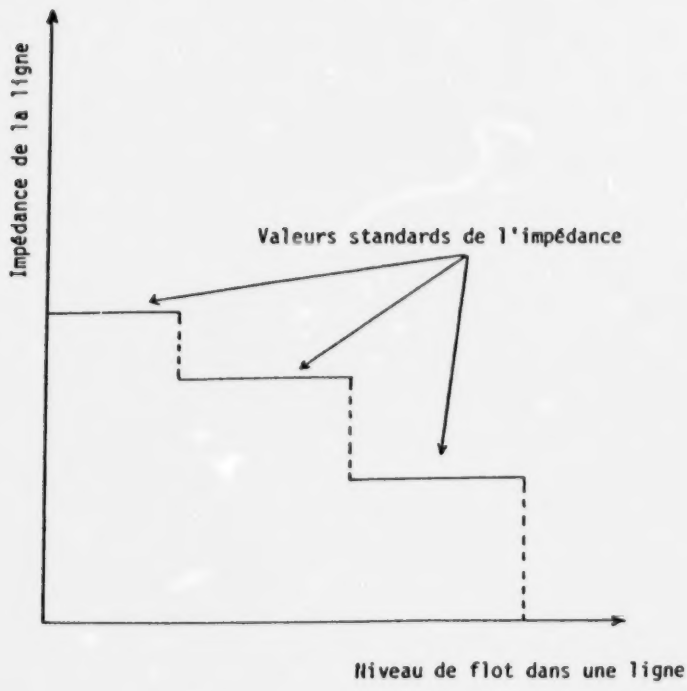


Figure 1.2: Relation, flot-impédance

Avec cette hypothèse, les contraintes de chute de tension peuvent être remplacées par un ensemble de contraintes linéaires. Mais, cette transformation a pour conséquence d'augmenter considérablement le nombre de variables 0-1 dans le problème.

Le programme mathématique, qu'il obtient finalement, est un programme linéaire en variables continues et en variables 0-1. Il est résolu par une méthode de type "Branch and Bound" où les programmes linéaires sont résolus en utilisant un code moderne de programmation linéaire.

L'approche d'Elkady, pour séduisante qu'elle soit, ne peut malheureusement s'appliquer qu'à des réseaux de petite taille à cause de la dimension du problème et de la méthode de résolution utilisée.

1.4 Les autres approches

Comme nous l'avions signalé plus tôt, l'article d'Adams et Laughton (1974) a été le prélude à une florissante recherche dans le domaine de la planification de la distribution d'énergie électrique. Ainsi, en 1977, Hindi et Brameller construisent un modèle où les coûts impliqués comprennent les coûts fixes et variables des postes et des lignes ainsi que les coûts de perte de puissance. Le modèle qu'ils obtiennent est un modèle de flot borné dans un réseau de transport avec coûts linéaires (associés aux variables continues) et coûts fixes (associés aux variables 0-1 correspondants aux bornes sur le flot). La méthode de résolution est de type "Branch and Bound".

En 1980, Wall, Thompson et Northcote-Green reprennent l'approche d'Adams et Laughton en ignorant tous les coûts fixes. Ils obtiennent un modèle de flot borné à coût linéaire dans un réseau de transport.

Plus tard, en 1981, Thompson et Wall reprennent la même approche en tenant compte, cette fois, des coûts fixes associés aux postes. Le modèle obtenu est un problème de programmation linéaire mixte résolu par une méthode de type "Branch and Bound".

En 1981, Gonen et Foote proposent un modèle permettant de déterminer, pour une seule période, les sites et les capacités des postes ainsi que le réseau de lignes. Ils modélisent les coûts fixes reliés aux postes et définissent les coûts associés aux lignes (investissement, entretien et perte de puissance) comme une fonction du flot qui n'est ni linéaire ni convexe. Une approximation linéaire est alors utilisée et le problème obtenu est un problème de programmation linéaire mixte résolu par le logiciel

MPSX.

Malgré le fait que les contraintes sur les chutes de tension ne sont pas considérées dans le modèle, cette approche ne peut être appliquée qu'à des réseaux de petite taille et ce, à cause du nombre très élevé de variables 0-1 impliquées par l'approximation linéaire.

En 1982, les mêmes auteurs donnent une variante au modèle précédent en modifiant la définition de la fonction coût associée aux lignes. Cette modification leur permet de considérer plusieurs périodes. Mais, encore une fois la méthode ne peut être appliquée qu'à des réseaux de petite taille.

La même année (1982), Sun et al. améliorent l'approche de Thompson et Wall (1981) en modélisant les coûts fixes sur les postes et sur les lignes. Mais, leur principal apport réside dans la méthode de résolution qu'ils proposent. Cette dernière, de type "Branch and Bound", exploite la structure de réseau du problème pour effectuer, de façon plus efficace, l'évaluation et la séparation, lors du processus de résolution.

En 1983, Fawzi et al. raffinent le modèle précédent. Ils utilisent des fonctions linéaires par morceau pour modéliser les coûts reliés aux postes et aux lignes. Le processus de résolution se déroule en deux étapes. Dans un premier temps, seuls les coûts dominants (coûts des postes et éventuellement de certaines lignes) sont considérés. Un algorithme de type "Branch and Bound" est utilisé pour trouver une solution à ce problème relaxé. Dans un deuxième temps, et par un processus itératifs, les principaux coûts sont introduits pour ajuster la solution trouvée à l'étape 1.

Avant de clore ce chapitre, signalons qu'en 1985, Willis et Northcote-Green ont consacré un article à la comparaison des différentes approches concernant le problème de la planification de la distribution d'énergie électrique. Les tests ont été effectués pour une seule période et leurs conclusions semblent pencher vers les modèles de flot bornés dans un réseau de transport avec coûts linéaires et coûts fixes. (Pour plus de détail, voir Willis et Northcote-Green (1985)).

CHAPITRE II

CONSTRUCTION DU MODELE

Le modèle que nous nous proposons de construire devra refléter le plus fidèlement possible la réalité d'un réseau de distribution d'énergie électrique. Une fois résolu, le modèle devra nous donner, pour chaque période de l'horizon de planification,

i) Un schéma d'exploitation qui permette d'alimenter tous les points de charge.

ii) La capacité de chaque poste, i.e. le nombre de transformateurs dans le poste.

iii) Le calibre du conducteur définissant une ligne.

iv) Les points de charge nécessitant l'installation d'un régulateur afin de rétablir la tension dans les limites fixées.

L'objectif est d'y parvenir en minimisant les coûts d'installation et d'exploitation des équipements ainsi que le coût des pertes de puissance dans les lignes.

Le modèle devra, bien entendu, respecter un certain nombre de contraintes dont les principales sont les suivantes:

. Le réseau est exploité suivant un schéma radial.
. La capacité des postes ne doit pas être dépassée.
. L'intensité dans les lignes doit être inférieure à la limite admissible.
. Les tensions aux points de charge doivent rester dans les limites fixées.
. La demande en tout point de charge doit être satisfaite.

Avant de commencer la construction proprement dite du modèle, nous allons donner quelques précisions sur la terminologie utilisée et introduire les notations que nous utiliserons tout au long de ce chapitre.

2.1 Définitions et notation

Nous commencerons par rappeler quelques notions de la théorie des graphes dont la plus grande partie est tirée de (Sakarovich (1984)) pour introduire ensuite les termes propres à l'énergie électrique.

2.1.1 Définitions

Définition 2.1: Graphe orienté

Un graphe orienté G est défini par :

. deux ensembles N et E dits ensemble de sommets et d'arcs respectivement,
. deux applications I et T: E -> N qui associent à chaque arc son extrémité initiale et son extrémité terminale respectivement.

Remarque 2.1

On associe souvent à un graphe une représentation graphique dans laquelle les sommets sont des points et les arcs des segments de courbe simple munis d'une orientation permettant de différencier l'extrémité initiale de l'extrémité terminale.

Remarque 2.2

Pour des raisons de commodité, nous désignerons un arc u en écrivant u=(x,y) voulant dire par là que l'arc u a le sommet x comme extrémité initiale et le sommet y comme extrémité terminale. De même, un graphe G sera désigné par la notation G=(N,E).

Définition 2.2: Prédécesseur

Un sommet x est un prédécesseur d'un sommet y dans le graphe orienté G=(N,E) s'il existe un arc $u = (x,y) \in E$; l'ensemble des prédécesseurs de y dans le graphe G sera noté $\Gamma_y^- = \{x \in N: (x,y) \in E\}$

Définition 2.3: Successeur

Un sommet y est un successeur d'un sommet x dans le graphe orienté G=(N,E) s'il existe un arc $u = (x,y) \in E$; l'ensemble des successeurs de x dans le graphe G sera noté $\Gamma_x^+ = \{y \in N: (x,y) \in E\}$.

Définition 2.4: Chemin

Soit G=(N,E) un graphe orienté et $x,y \in N$. Un chemin de x à y dans G est une séquence d'arcs dans G telle que:

. l'extrémité initiale du premier arc de la séquence est x,
. l'extrémité initiale de chacun des autres arcs de la séquence coïncide avec l'extrémité terminale de l'arc précédent,
. l'extrémité terminale du dernier arc de la séquence est y.

Définition 2.5: Chaîne

Soit G(N,E) un graphe et $x,y \in N$. Une chaîne joignant x et y dans G est une séquence d'arcs de G telle que:

. Le premier arc de la séquence est adjacent à x par une de ses extrémités et au second arc de la séquence par son autre extrémité.

. Le dernier arc de la séquence est adjacent à y par une de ses extrémités et à l'avant dernier arc de la séquence par son autre extrémité.

. Chaque arc intermédiaire de la séquence est adjacent au précédent par une de ses extrémités et au suivant par l'autre extrémité.

Une chaîne dont l'extrêmité initiale coïncide avec l'extrêmité terminale est appelée cycle.

Définition 2.6: Connexité

Etant donné un graphe G(N,E), on définit la relation $\tilde{C}$ de connexité sur l'ensemble N des sommets de G par :

$$x\tilde{C}y \leftrightarrow \begin{cases} \textit{il existe une chaîne joignant } x \textit{ et } y \\ \textit{ou bien } x = y \end{cases}$$

$\tilde{C}$ est une relation d'équivalence dont les classes sont appelées "composantes connexes de G". Un graphe est dit connexe s'il ne possède qu'une seule composante connexe.

Définition 2.7: Arbre

Un arbre est un graphe connexe sans cycle.

Définition 2.8: Arborescence

Soit un graphe G=(N,E).
Un sommet $r \in N$ est une racine, s'il existe dans G un chemin joignant r à x pour tout $x \in N$.
G est une arborescence de racine r si $|N| \geq 2$, r est racine de G et G est un arbre.

Définition 2.9: Réseau

Un réseau orienté est un graphe orienté G=(N,E), connexe et sans boucle où l'on distingue deux ensembles de sommets particuliers:

. l'ensemble des sommets source

. l'ensemble des sommets destination.

Remarque 2.3

Il nous arrivera, par abus de langage, de désigner par réseau un graphe composé de plusieurs arborescences.

Les définitions qui suivent concernent un réseau de distribution d'énergie électrique.

Définition 2.10: Point de charge

Un point de charge est un point destination du réseau où il y a consommation d'énergie par des abonnés.

Définition 2.11: Poste

Un poste est un point source du réseau. La capacité d'un poste est déterminée par le nombre de transformateurs qui y sont installés.

Définition 2.12: Ligne

Une ligne est un conducteur servant à transporter la puissance d'un point à un autre. Dans notre formulation, une ligne désignera un arc du réseau.

Définition 2.13: Arc admissible

Un arc admissible est un arc représentant une ligne existante ou potentielle.

2.1.2 Notations

Les notations définies ci-dessous seront utilisées tout au long de ce travail.

Les constantes

I = ensemble des postes existants ou potentiels

J = ensemble des points de charge existants ou futurs

E = ensemble des arcs (i,j) admissibles

F = $\{(i,j) \in E: i \in J, j \in J\}$

$\bar{F}$ = E - F

Γ_j^- = ensemble des prédécesseurs de j dans le graphe orienté $G(I \cup J, E)$

Γ_j^+ = ensemble des successeurs de j dans le graphe orienté $G(I \cup J, E)$

S = ensemble des types de conducteurs (lignes)

C = ensemble des capacités des transformateurs

T = dernière période de l'horizon de planification

T = {0,1,..., T}

U_ω = capacité maximum (en KVA) d'une ligne de type ω

R_ω = résistance (en Ω/km) d'une ligne de type ω

X_ω = réactance (en Ω/km) d'une ligne de type ω

Cosϕ = facteur de puissance

V_N = tension nominale (en KV)

V_l = tension minimale (en KV) tolérée.

Paramètres

K_{cit} = coût d'installation d'un transformateur de capacité c dans le poste i pendant la période t

E_{cit} = coût d'exploitation d'un transformateur de capacité c dans le poste i pendant la période t

$K'_{\omega t}$ = coût unitaire (par Km) d'installation d'une ligne de type ω pendant la période t

E'_{ijt} = coût unitaire (par Km) d'exploitation de la ligne (i,j) pendant la période t

K''_t = coût d'installation d'un régulateur de tension pendant la période t

E''_t = coût d'exploitation d'un régulateur de tension pendant la période t

a_t = coût d'un VA "perdu" dans une ligne pendant la période t

l_{ij} = longueur (en Km) de la ligne (i,j)

b_i = nombre maximum de transformateurs pouvant être installés dans le poste i

d_{jt} = demande (en KVA) au point de charge j pendant la période t.

Variables

α_{cit} = nombre de transformateurs de capacité c, existant pendant la période t dans le poste i.

$$\gamma_{ij\omega t} = \begin{cases} 1 & \textit{si la ligne (i,j) de type } \omega \textit{ est utilisée pendant la période t.} \\ 0 & \textit{autrement} \end{cases}$$

$$\delta_{jt} = \begin{cases} 1 & \textit{si un régulateur est installé pendant la période t au point de charge j.} \\ 0 & \textit{autrement.} \end{cases}$$

x_{ijt} = flot de puissance dans la ligne (i,j) pendant la période t

v_{jt} = tension au point de charge j pendant la période t.

Avant de clôre cette section, désignons par J_t l'ensemble des points de charge ayant une demande positive à la période t i.e. $J_t = \{j \in J: d_{jt} > 0\}$
et posons

$$\Delta_{\omega ij} = \frac{R_\omega \, Cos\phi + X_\omega \, Sin\phi}{\sqrt{3}\, V_N} \, l_{ij}$$

Signalons enfin que les relations électriques intervenant dans le modèle ont été déduite de Gonen (1986) et Wildi (1978). On trouvera dans l'annexe C une justification rapide des formules utilisées.

Remarque 2.4

Les coûts ont été indexés de leur période pour permettre de prendre en considération le facteur d'actualisation.

2.2 Définition de la fonction économique

Rappelons que nous cherchons à minimiser les coûts d'installation et d'exploitation des équipements ainsi que les coûts des pertes de puissance dans les lignes.

Avant de donner l'expression de la fonction économique, posons quelques hypothèses:

H1) si $(i,j) \in F$ alors $(j,i) \in F$. Cela signifie que si l'on peut joindre les points de charge i et j alors on pourra écouler la puissance aussi bien dans le sens $i \rightarrow j$ que dans le sens $j \rightarrow i$.

H2) Si une ligne (i,j) de type ω est utilisée pendant la période t alors il n'en coûtera rien si l'on décide d'utiliser la ligne (j,i) de type ω à la période (t+1).

H3) Le nombre de transformateurs d'un type donné dans un poste donné ne peut décroître d'une période à l'autre.

H4) Une fois qu'un régulateur de tension est installé en un point de charge donné, la tension en ce point est redressée pour le reste de l'horizon de planification.

Remarque 2.5

Les hypothèses H1 à H4 n'ont rien de restrictif et correspondent à la réalité d'un réseau de distribution.

Avec les hypothèses ci-dessus, la fonction économique s'écrit:

$$Z = P_f(\alpha) + P_e(\alpha) + L_f(\gamma) + L_e(\gamma) + R_f(\delta) + R_e(\delta) + h(x,\gamma).$$

où:

. $P_f(\alpha)$ désigne le coût fixe d'installation associé aux postes et a pour expression:

$$P_f(\alpha) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in I} \sum_{c \in C} K_{cit} \, (\alpha_{cit} - \alpha_{cit-1})$$

. $P_e(\alpha)$ désigne le coût d'exploitation associé aux postes et a pour expression:

$$P_e(\alpha) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in I} \sum_{c \in C} E_{cit}\, \alpha_{cit}$$

. $L_f(\gamma)$ désigne le coût fixe d'installation associé aux lignes et a pour expression:

$$L_f(\gamma) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{(i,j) \in F} \sum_{\omega \in S} K'_{\omega t}\, l_{ij}\, \gamma_{ij\omega t}\, (1-\gamma_{ij\omega t-1})\, (1-\gamma_{ji\omega t-1})$$

$$+ \sum_{t=1}^{T} \sum_{(i,j) \in \bar{F}} \sum_{\omega \in S} K'_{\omega t}\, l_{ij}\, \gamma_{ij\omega t}\, (1-\gamma_{ij\omega t-1})$$

. $L_e(\gamma)$ désigne le coût d'exploitation associé aux lignes et a pour expression:

$$L_e(\gamma) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{(i,j) \in E} \sum_{\omega \in S} E'_{ijt}\, l_{ij}\, \gamma_{ij\omega t}$$

. $R_f(\delta)$ désigne le coût fixe d'installation associé aux régulateurs de tension et a pour expression:

$$R_f(\delta) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{j \in J} K''_t\, \delta_{jt}$$

. $R_e(\delta)$ désigne le coût d'exploitation associé aux régulateurs de tension et a pour expression:

$$R_e(\delta) = \sum_{j \in J} \sum_{t=1}^{T} E''_t \sum_{\tau=0}^{t} \delta_{j\tau}$$

. $h(x,\gamma)$ désigne le coût des pertes de puissance dans les lignes et a pour expression:

$$h(x,\gamma) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{(i,j) \in E} \sum_{\omega \in S} \frac{\sqrt{3}}{V_N}\, a_t \Delta_{\omega ij}\, \gamma_{ij\omega t} (x_{ijt})^2$$

Remarque 2.6

Dans l'expression de $L_f(\gamma)$ nous avons considéré que si une ligne est utilisée l'année t, puis abandonnée l'année t+1 alors il en coûtera aussi cher de la

remettre en état de servir, pour une période t+i, i>1, que de la reconstruire.

2.3 Définition des contraintes

Nous allons détailler trois ensembles de contraintes qui caractériseront les postes, les lignes et les points de charge.

2.3.1 Contraintes sur les postes

1. Le nombre de transformateurs d'un type donné dans un poste donné ne peut décroître d'une période à l'autre.

$$\alpha_{cit} \geq \alpha_{cit-1} \; ; \; c \in C, \; i \in I, \; t \in \mathbf{T}-\{0\}.$$

2. Chaque poste ne peut contenir qu'un nombre fini de transformateurs.

$$\sum_{c \in C} \alpha_{cit} \leq b_i \; ; \; i \in I, \; t \in \mathbf{T}.$$

3. En toute période, la capacité totale des postes est au moins égale à la demande totale.

$$\sum_{i \in I} \sum_{c \in C} c\alpha_{cit} \geq \sum_{j \in J} d_{jt} \; ; \; t \in \mathbf{T}.$$

4. La demande à un poste n'excède pas sa disponibilité.

$$\sum_{j \in \Gamma_i^+} x_{ijt} \leq \sum_{c \in C} c\alpha_{cit} \; ; i \in I, \; t \in \mathbf{T}.$$

2.3.2 Contraintes sur les lignes

5. En une période t donnée, une connexion entre deux points de charge i et j ne peut être utilisée qu'au plus dans un des sens $i \rightarrow j$ ou $j \rightarrow i$

$$\sum_{\omega \in S} \gamma_{ij\omega t} + \sum_{\omega \in S} \gamma_{ji\omega t} \leq 1 \; ; \; (i,j) \in F, \; t \in \mathbf{T}.$$

6. Le réseau de lignes est radial

$$\sum_{i \in \Gamma_j^-} \sum_{\omega \in S} \gamma_{ij\omega t} \leq 1 \; ; \; j \in J, \; t \in \mathbf{T}.$$

7. L'intensité dans les lignes est inférieure à la limite admissible.

$$x_{ijt} \leq \sum_{\omega \in S} U_\omega \, \gamma_{ij\omega t} \; ; \; (i,j) \in E, \; t \in \mathbf{T}.$$

8. En une période donnée, un point de charge dont la demande est positive doit nécessairement être alimenté.

$$\sum_{i \in \Gamma_j^-} \sum_{\omega \in S} \gamma_{ij\omega t} = 1 \; ; \; j \in J_t, \; t \in \mathbf{T}.$$

9. Un point de charge dont la demande est nulle ne peut pas être racine.

$$(1 - \sum_{i \in \Gamma_j^-} \sum_{\omega \in S} \gamma_{ij\omega t}) \sum_{i \in \Gamma_j^+} \sum_{\omega \in S} \gamma_{ji\omega t} = 0 \; ; \; j \in J - J_t, \; t \in \mathbf{T} \; .$$

2.3.3 Contrainte sur les points de charge

10. En une période donnée, un point de charge j qui est sommet terminal d'une ligne utilisée, a une tension au moins égale à la tension minimale.

$$(\sum_{i \in \Gamma_j^-} \sum_{\omega \in S} \gamma_{ij\omega t})(V_l - V_{jt}) \leq 0 \; ; \; j \in J, \; t \in \mathbf{T}.$$

11. En une période donnée, un point de charge j "isolé" a une tension nulle [1].

$$(1 - \sum_{i \in \Gamma_j^-} \sum_{\omega \in S} \gamma_{ij\omega t}) \, V_{jt} = 0 \; ; \; j \in J, \; t \in \mathbf{T}.$$

12. La tension à la sortie de tout poste i est égale à la tension nominale [2].

$$V_{it} = V_N \; ; \; i \in I \; ; \; t \in \mathbf{T}.$$

13. Un point de charge j où un régulateur a été installé possède une tension égale à la tension nominale.

$$(\sum_{\tau=0}^{t} \delta_{j\tau})(V_N - V_{jt}) = 0 \; ; \; j \in J, \; t \in \mathbf{T}.$$

14. La relation entre les tensions aux sommets initial i et terminal j d'une ligne (i,j) s'écrit:

$$\gamma_{ij\omega t} \, (1 - \sum_{\tau=0}^{t} \delta_{j\tau})(V_{it} - V_{jt} - \Delta_{\omega ij} \, x_{ijt}) = 0 \; ; \; (i,j) \in E, \; \omega \in S, \; t \in \mathbf{T}.$$

15. Un point de charge j ne peut accepter plus d'un régulateur.

$$\sum_{t=0}^{T} \delta_{jt} \leq 1 \; ; \; j \in J.$$

16. En chaque point de charge, il y a conservation de flot.

$$\sum_{i \in \Gamma_j^-} x_{ijt} - \sum_{i \in \Gamma_j^+} x_{jit} = d_{jt} \; ; \; j \in J, \; t \in \mathbf{T}.$$

2.3.4 Contraintes sur les variables

17. Le flot de puissance dans une ligne est bornée par M

où

$$M = \max_{t \in \mathbf{T}} \left\{ \sum_{j \in J} d_{jt} \right\}$$

$$x_{ijt} \leq M \; ; \; (i,j) \in E, \; t \in \mathbf{T}.$$

18.

$$\gamma_{ij\omega t} = 0 \; ou \; 1 \; ; \; (i,j) \in E, \; \omega \in S, \; t \in \mathbf{T}$$

$$\delta_{jt} = 0 \; ou \; 1 \; ; \; j \in J, \; t \in \mathbf{T}$$

$$\alpha_{cit} = \{0,1,\ldots,b_i\}; \; c \in C, \; i \in I, \; t \in \mathbf{T}$$

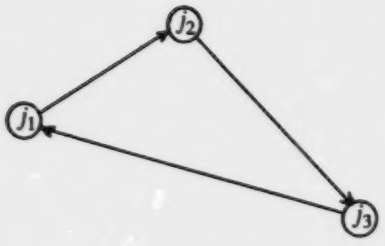
$$x_{ijt} \geq 0 \; ; \; (i,j) \in E, \; t \in \mathbf{T}$$

$$0 \leq V_{jt} \leq V_N \; ; \; j \in J, \; t \in \mathbf{T}.$$

19. Elimination des circuits

$$\gamma \in \Gamma$$

où γ est le vecteur des variables $\gamma_{ij\omega t}$ et Γ est un ensemble de contraintes permettant d'éliminer les circuits dont une illlustration est présentée à la figure 2.1



où j_1, j_2, j_3 sont des points de charge dont au moins un a une demande positive.

Figure 2.1: Exemple de circuit

---

(1): Nous entendons par point de charge isolé à une période donnée t, un point de charge j tel que $d_{jt} = 0$ et $\sum_{i \in \Gamma_j^-} \sum_{\omega \in S} \gamma_{ij\omega t} = 0$.

(2): Il peut paraître "choquant" de considérer que la tension à la sortie d'un poste de capacité nulle est égale à V_N. Mais cette condition n'altère en rien le réseau physique réel alors qu'elle simplifie grandement l'évaluation des tensions.

Remarque 2.7

Certaines contraintes décrites plus haut sont redondantes; et si leur ajout dans le modèle a l'inconvénient d'agrandir la taille du problème, il présente par contre plusieurs avantages appréciables.

Ainsi la contrainte (3) est vérifiée à chaque fois que les contraintes (4) et (16) le sont. De même, la contrainte (8) est vérifiée à chaque fois que (7) et (16) le sont. Mais compte tenu de la méthode de résolution choisie (Benders généralisée), la présence de (3) et (8) dans le modèle va accélérer grandement le processus de résolution, comme nous le verrons plus loin.

Egalement, la contrainte (17) n'interviendra que pour faciliter la justification théorique de la méthode de résolution choisie. Finalement, la présence des contraintes (7) et (16) rend les contraintes (8) et (9) redondantes. Par contre, comme nous le verrons plus loin, comme la contrainte (16) n'apparaîtra pas avec (7) au cours de la résolution, l'introduction de (8) et (9) devient alors nécessaire.

2.4 Le modèle

En remarquant que pour tout $(i,j)\in F$, tout $\omega\in S$ et tout $t\in T$ on a $\gamma_{ij\omega t} \cdot \gamma_{ji\omega t} = 0$, l'expression de $L_f(\gamma)$ devient:

$$L_f(\gamma) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{(i,j)\in F} \sum_{\omega\in S} K'_{\omega t}\, l_{ij}\, \gamma_{ij\omega t}\,(1-\gamma_{ij\omega t-1}-\gamma_{ji\omega t-1}) + \sum_{t=1}^{T} \sum_{(i,j)\in F} \sum_{\omega\in S} K'_{\omega t}\, l_{ij}\, \gamma_{ij\omega t}\,(1-\gamma_{ij\omega t-1}).$$

et en posant

$$f_1(\alpha) = P_f(\alpha) + P_e(\alpha)$$
$$f_2(\delta) = R_f(\delta) + R_e(\delta)$$
$$f_3(\gamma) = L_f(\gamma) + L_e(\gamma).$$

Le modèle s'écrit:

$$Min\ Z = f_1(\alpha) + f_2(\delta) + f_3(\gamma) + h(x,\gamma)$$

s. à

$$\sum_{j\in\Gamma_i^+} x_{ijt} - \sum_{c\in C} c\alpha_{cit} \le 0\ ;\ i\in I,\ t\in \mathbf{T} \qquad (2.1)$$

$$x_{ijt} - \sum_{\omega\in S} U_\omega\, \gamma_{ij\omega t} \le 0\ ;\ (i,j)\in E,\ t\in \mathbf{T} \qquad (2.2)$$

$$(\sum_{i\in\Gamma_j^-} \sum_{\omega\in S} \gamma_{ij\omega t})(V_I - V_{jt}) \le 0\ ;\ j\in J,\ t\in \mathbf{T} \qquad (2.3)$$

$$(1- \sum_{i\in\Gamma_j^-} \sum_{\omega\in S} \gamma_{ij\omega t})\, V_{jt} = 0\ ;\ j\in J,\ t\in \mathbf{T} \qquad (2.4)$$

$$(\sum_{\tau=0}^{t} \delta_{j\tau})(V_{jt} - V_N) = 0\ ;\ j\in J,\ t\in \mathbf{T} \qquad (2.5)$$

$$\gamma_{ij\omega t}\,(1- \sum_{\tau=0}^{t} \delta_{i\tau})(V_{it} - V_{jt} - \Delta_{\omega ij}\, x_{ijt}) = 0\ ;\ (i,j)\in E,\ \omega\in S,\ t\in \mathbf{T} \qquad (2.6)$$

(P.2)

$$\sum_{i\in\Gamma_j^-} x_{ijt} - \sum_{i\in\Gamma_j^+} x_{jit} = d_{jt}\ ;\ j\in J,\ t\in \mathbf{T} \qquad (2.7)$$

$$0 \le x_{ijt} \le M \quad ;\quad (i,j)\in E,\ t\in \mathbf{T} \qquad (2.8)$$

$$0 \le V_{jt} \le V_N \quad ;\quad j\in J,\ t\in \mathbf{T} \qquad (2.9)$$

$$V_{it} = V_N \quad ;\quad i\in I,\ t\in \mathbf{T} \qquad (2.10)$$

$$\alpha_{cit} - \alpha_{cit-1} \ge 0 \quad ;\quad c\in C,\ i\in I, t\in \mathbf{T} \qquad (2.11)$$

$$\sum_{i\in I} \sum_{c\in C} c\alpha_{cit} \ge \sum_{j\in J} d_{jt} \quad ;\quad t\in \mathbf{T} \qquad (2.12)$$

$$\sum_{c\in C} \alpha_{cit} \le b_i \quad ;\quad i\in I,\ t\in \mathbf{T} \qquad (2.13)$$

$$\sum_{\omega\in S} \gamma_{ij\omega t} + \sum_{\omega\in S} \gamma_{ji\omega t} \le 1 \quad ;\quad (i,j)\in F,\ \omega\in S,\ t\in \mathbf{T} \qquad (2.14)$$

$$\sum_{i\in\Gamma_j^-} \sum_{\omega\in S} \gamma_{ij\omega t} = 1 \quad ;\quad j\in J_t,\ t\in \mathbf{T} \qquad (2.15)$$

$$\sum_{i \in \Gamma_j^-} \sum_{\omega \in S} \gamma_{ij\omega t} \leq 1 \quad ; \quad j \in J,\ t \in \mathbf{T} \tag{2.16}$$

$$(1 - \sum_{i \in \Gamma_j^-} \sum_{\omega \in S} \gamma_{ij\omega t}) \left(\sum_{i \in \Gamma_j^+} \sum_{\omega \in S} \gamma_{ji\omega t} \right) = 0 \quad ; \quad j \in J - J_t\ ,\ t \in \mathbf{T} \tag{2.17}$$

$$\sum_{t=0}^{T} \delta_{jt} \leq 1 \quad ; \quad j \in J \tag{2.18}$$

$$\delta_{jt} = 0 \text{ } ou \text{ } 1 \quad ; \quad j \in J,\ t \in \mathbf{T} \tag{2.19}$$

$$\alpha_{cit} = 0,1,\ldots,b_i \quad ; \quad c \in C,\ i \in I,\ t \in \mathbf{T}. \tag{2.20}$$

$$\gamma_{ij\omega t} = 0 \text{ } ou \text{ } 1 \quad ; \quad (i,j) \in E,\ \omega \in S,\ t \in \mathbf{T} \tag{2.21}$$

$$\gamma \in \mathbf{\Gamma}\ . \tag{2.22}$$

CHAPITRE III

APPROCHE DE RESOLUTION : METHODE DE BENDERS GENERALISEE ET APPLICATION AU MODELE DE PLANIFICATION

3.1 Motivation

Dans le modèle développé au chapitre précédent, nous avions deux types de variables : des variables entières α, δ, γ qu'on pourrait interpréter comme des variables d'investissement et des variables continues x, v qu'on pourrait interpréter comme des variables de gestion.

Si l'on désigne par y le vecteur des variables d'investissement et par z le vecteur des variables de gestion et si l'on pose

$$f(y) = f_1(\alpha) + f_2(\delta) + f_3(\gamma)$$

$$g(z,y) = h(x,\gamma)$$

$Z = \{z = (x,v)$: les contraintes (2.7) à (2.10) sont vérifiées$\}$

$Y = \{y = (\alpha,\delta,\gamma)$: les contraintes (2.11) à (2.22) sont vérifiées$\}$

Si enfin $G(z,y) \leq 0$ représente les contraintes (2.1) à (2.3),

$H(z,y) = 0$ représente les contraintes (2.4) à (2.6),

le modèle s'écrit:

$$\begin{aligned} & Min\ f(y) + g(z,y) \\ & sujet\ à \\ & G(z,y) \leq 0 \\ & H(z,y) = 0 \\ & z \in Z \\ & y \in Y \end{aligned} \qquad \text{(P.O)}$$

Nous constatons que (P.O.) se divise en deux problèmes, un problème d'investissement et un problème de gestion. Or la méthode de partition de Benders, introduite par Benders (1962) puis généralisée par A.M. Geoffrion (1972) est spécialement adaptée à ce type de problèmes.

L'objet de ce chapitre sera, précisément, d'exposer les principales idées de la méthode ainsi que les conditions, que doivent vérifier les différentes entités du problème considéré, pour que la méthode soit applicable.

3.2 Méthode de Benders Généralisée

C'est J.F. Benders qui, en 1962, proposa une méthode de partition pour résoudre les problèmes de la forme suivante.

$$\begin{aligned} & Min\ c^T x + \tau(y) \\ & sujet\ à \\ & Ax - f(y) \geq b \\ & x \geq 0,\ y \in Y. \end{aligned} \qquad (3.1)$$

L'idée clé de sa méthode (voir Geoffrion (1972), a été de faire une projection du problème (3.1) sur l'espace des variables y. Utilisant une dualisation puis une linéarisation interne, il a obtenu un sous-problème (facile à résoudre) et un problème maître qu'il résout en utilisant l'approche de relaxation.

En 1972, A.M. Geoffrion généralisa la méthode de Benders aux problèmes de la forme:

$$\begin{aligned} &\textit{Min } f(z,y) \\ &\textit{sujet à} \\ &G(z,y) \leq 0 \\ &z \in Z,\ y \in Y. \end{aligned} \tag{3.2}$$

où G est un ensemble de m fonctions définies sur $ZxY \subseteq R^{n_1} \times R^{n_2}$.

Suivant la même approche que précédemment, il considère la projection du problème (3.2) sur l'espace des variables y. Cette projection s'écrit:

$$\underset{y \in Y \cap V}{Min}\ v(y) \tag{3.3}$$

où

$$v(y) = \inf_{z \in Z} \{f(z,y) : G(z,y) \leq 0\}$$

$$V = \{y : \exists\, z \in Z \textit{ tel que } G(z,y) \leq 0\}$$

Il démontre trois théorèmes permettant, d'une part d'établir les relations entre les problèmes (3.2) et (3.3) et d'autre part de donner une caractérisation de l'ensemble V et de la fonction v.

Avant d'énoncer ces théorèmes, dénotons par $(SP.\bar{y})$ le problème

$$(SP.\bar{y}) \qquad \underset{z \in Z}{Min} \{f(z,\bar{y}) : G(z,\bar{y}) \leq 0\}\ .$$

Théorème 3.1

a) Le problème (3.2) est non réalisable ou non borné inférieurement si et seulement si il en est de même pour le problème (3.3).

b) Si (z^*, y^*) est une solution optimale de (3.2) alors y^* est une solution optimale de (3.3).

c) Si y^* est une solution optimale de (3.3) et si z^* est une solution optimale de $(SP.y^*)$ alors (z^*, y^*) est une solution optimale de (3.2).

d) Si $\bar{y}$ est une solution ε_1-optimale de (3.3) et si $\bar{z}$ est une solution ε_2-optimale pour $(SP.\bar{y})$ alors $(\bar{z}, \bar{y})$ est $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$-optimale pour (3.2).

Preuve:

La preuve de ce théorème est assez simple et se trouve dans Geoffrion (1971).

Théorème 3.2

On suppose que Z est convexe et non vide, G est convexe sur Z pour tout $y \in Y$ et $Wy = \{w \in R^m : \exists\, z \in Z$ tel que $G(z,y) \leq w\}$ est fermé pour tout $y \in Y$.
Alors:
un point $\overline{y} \in Y$ appartient à V si et seulement si

$$\inf_{z \in Z} \{\lambda^T G(z,\overline{y})\} \leq 0\ ,\ \forall \lambda \in \Lambda = \{\lambda \in R^m : \lambda \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\}$$

Théorème 3.3

On suppose que Z est convexe et non vide, f et G sont convexes sur Z pour tout $y \in Y$, et pour tout $\overline{y} \in Y \cap V$, au moins une des deux conditions suivantes est vérifiée : i) $v(\overline{y})$ est fini et $(SP.\overline{y})$ possède un vecteur de multiplicateurs optimaux;

ii) $v(\overline{y}) = -\infty$.

Alors, la valeur optimale de $(SP.y)$ est égale à la valeur optimale de son dual sur $Y \cap V$, i.e.

$$v(y) = \sup_{u \geq 0} [\inf_{z \in Z} \{f(z,y) + u^T G(z,y)\}] \quad \forall y \in \ Y \cap V$$

La preuve des théorèmes 3.2 et 3.3 se trouve dans Geoffrion (1972).

Nous sommes maintenant en mesure de construire le problème maître. En effet, nous avons vu, par le théorème 3.1 qu'il y a une certaine équivalence entre les problèmes (3.2) et (3.3), or par les théorèmes 3.2 et 3.3, le problème (3.2) est équivalent à

$$\underset{y\in Y}{Min}\{\underset{u\geq 0}{sup}\{\underset{z\in Z}{inf}\,[f(z,y) + u^T G(z,y)]\}\}$$

$$\textit{sujet à} \qquad (3.4)$$

$$\underset{z\in Z}{inf}\{\lambda^T G(z,y)\} \leq 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

ou encore en utilisant la définition du sup comme étant la plus petite borne supérieure, le problème (3.4) s'écrit,

$$\begin{aligned} &Min\ y_0 \\ &\textit{sujet à} \\ &\underset{z\in Z}{inf}\{f(z,y) + u^T G(z,y)\} \leq y_0 \qquad \forall u \geq 0 \qquad (3.5a) \qquad (3.5) \\ &\underset{z\in Z}{inf}\{\lambda^T G(z,y)\} \leq 0 \qquad \forall \lambda \in \Lambda \qquad (3.5b) \\ &y \in Y. \end{aligned}$$

Le problème (3.5) est appelé problème maître. Pour le résoudre, on utilise l'approche de relaxation qui consiste à engendrer les coupes (contraintes (3.5a) et/ou (3.5b) au fur et à mesure que cela devient pertinent.

Ainsi les contraintes sont relaxées et certaines sont introduites progressivement dans le problème au cours de la résolution

Le problème maître relaxé s'écrit:

$$\begin{aligned} &Min\ y_0 \\ &\textit{sujet à} \\ &\underset{z\in Z}{inf}\{f(z,y) + (u^j)^T G(z,y)\} \leq y_0 \qquad j=1,\ldots, p \qquad (3.5R) \\ &\underset{z\in Z}{inf}\{(\lambda^j)^T G(z,y)\} \leq 0 \qquad j=1,\ldots, q \\ &y \in Y\ . \end{aligned}$$

La question qui se pose naturellement est de savoir si une solution optimale réalisable du problème relaxé (3.5R) est également réalisable pour le problème (3.5) et dans le cas de non réalisabilité de (3.5) quelle contrainte faut-il générer?

Pour répondre à cette question, considérons une solution optimale réalisable $(\hat{y}, \hat{y}_0)$ du problème relaxé (3.5R) alors, par le théorème 3.2 et la définition de V on a,

$\hat{y}$ satisfait les contraintes (3.5b) si et seulement si $(SP.\hat{y})$ est réalisable.
D'autre part, si $(SP.\hat{y})$ est réalisable, par le théorème 3.3 on a,
$(\hat{y}, \hat{y}_0)$ satisfait les contraintes (3.5a) si et seulement si $v(\hat{y}) \leq \hat{y}_0$.

Ainsi, le sous problème $(SP.\hat{y})$ est le plus approprié pour tester la réalisabilité de $(\hat{y}, \hat{y}_0)$ pour le problème (3.5). De plus $(SP.\hat{y})$ permet, dans le cas de non réalisabilité de (3.5), de déterminer les multiplicateurs qui permettent d'engendrer la contrainte pertinente.

En effet si $(SP.\hat{y})$ est réalisable mais $v(\hat{y}) > \hat{y}_0$, alors si $\hat{u}$ est un vecteur de multiplicateurs optimaux de $(SP.\hat{y})$ on a

$$\inf_{z \in Z} \{f(z,\hat{y}) + \hat{u}^T G(z,\hat{y})\} > \hat{y}_0 .$$

et la contrainte à rajouter au problème (3.5R) est

$$\inf_{z \in Z} \{f(z,y) + \hat{u}^T G(z,y)\} \leq y_0 .$$

Si par contre $(SP.\hat{y})$ est non réalisable, il existe $\hat{\lambda} \in \Lambda$ tel que

$$\inf_{z \in Z} \{\hat{\lambda}^T G(z,\hat{y})\} > 0$$

et la contrainte à rajouter au problème (3.5R) est alors

$$\inf_{z \in Z} \{\hat{\lambda}^T G(z,y)\} \leq 0$$

L'algorithme de Benders généralisé permettant de résoudre le problème original se résume comme suit:

On suppose que les hypothèses des théorèmes 3.2 et 3.3 sont vérifiées et que le problème original a une solution optimale finie. On pose:

$$L^*(y;u) = \inf_{z \in Z} \{f(z,y) + u^T G(z,y)\} \quad y \in Y \text{ et } u \geq 0$$

$$L_*(y;\lambda) = \inf_{z \in Z} \{\lambda^T G(z,y)\} \qquad y \in Y , \lambda \in \Lambda .$$

On suppose également qu'une solution réalisable $\overline{y} \in Y \cap V$ est disponible (nous décrirons au chapitre IV une façon de construire une telle solution).

Etape 1:

Soit $\bar{y} \in Y \cap V$. Résoudre le sous-problème $(SP.\bar{y})$ et déterminer un vecteur de multiplicateurs optimaux $\bar{u}$ ainsi que la fonction $L^*(y;\bar{u})$.

Poser p=1, q=0, $\hat{u} = \bar{u}$, $BS = v(\bar{y})$ et choisir un niveau de tolérance $\varepsilon > 0$.

Etape 2:

Résoudre le problème maître relaxé

$$\begin{aligned} &Min\ y_0 \\ &sujet\ à \\ &L^*(y;u^j) \le y_0 \qquad j=1,\ldots, p \\ &L_*(y,\lambda^j) \le 0 \qquad j=1,\ldots, q \\ &y \in Y \end{aligned}$$

soit $(\hat{y}, \hat{y}_0)$ une solution optimale.

Si $BS - \varepsilon \le \hat{y}_0$, terminer.

Etape 3:

Résoudre le sous-probème $(SP.\hat{y})$. Une des situations suivantes doit se présenter:

i) $v(\hat{y})$ est fini

si $v(\hat{y}) \le \hat{y}_0 + \varepsilon$, terminer.

Autrement, déterminer un vecteur de multiplicateurs optimaux $\hat{u}$ ainsi que la fonction $L^*(y;\hat{u})$.

Augmenter p de 1 et poser $\hat{u} = u^p$. Si $v(\hat{y}) < BS$, poser $BS = v(\hat{y})$. Revenir à l'étape 2.

ii) Le problème $(SP.\hat{y})$ est non réalisable. Déterminer alors $\hat{\lambda} \in \Lambda$ tel que $\inf_{z \in Z} \{\hat{\lambda}^T G(\hat{z},y)\} > 0$. Expliciter $L_*(y,\hat{\lambda})$; augmenter q de 1, poser $\lambda^q = \hat{\lambda}$ et revenir à l'étape 2.

Remarques 3.1

1- La suite des valeurs optimales obtenues en résolvant les problèmes de la forme (3.5R) est une suite non décroissante de bornes inférieures sur la valeur optimale du problème original (3.2).

2- Egalement pour tout $\bar{y} \in Y$, si $(SP.\bar{y})$ est réalisable alors $v(\bar{y})$ est une borne supérieure pour la valeur optimale du problème (3.2).

Avant de terminer cette section, notons que la convergence de la méthode peut être prouvée dans plusieurs situations différentes. Pour ce qui nous concerne, nous retenons le théorème suivant:

Théorème 3.4

On suppose que Y est fini et que les hypothèses des théorèmes 3.2 et 3.3 sont vérifiées. Alors pour tout $\varepsilon \geq 0$ la méthode de décomposition de Benders généralisée se termine après un nombre fini d'itérations.

Preuve:

La preuve complète de ce résultat se trouve dans Geoffrion (1972). Notons seulement que l'assertion disant que la procédure se termine après un nombre fini d'itérations est une conséquence directe du fait que Y est fini et qu'aucune solution $\hat{y}$ de (3.5R) ne peut se répéter.

3.3 Application au modèle de planification de la distribution

Rappelons que notre modèle de planification de la distribution a la forme suivante:

$$\begin{aligned} & Min\ f(y) + g(z,y) \\ & sujet\ à \\ & G(z,y) \leq 0 \\ & H(z,y) = 0 \\ & z \in Z,\ y \in Y \end{aligned} \qquad \text{(P.O)}$$

Nous voulons appliquer la méthode de décomposition de Benders généralisée au problème (P.O). Mais, si nous examinons ce dernier de plus près, nous constatons les faits suivants:

a) L'existence de $H(z,y) = 0$ dans (P.O) change quelque peu les développements théoriques concernant le problème (3.2) et, plus particulièrement, la caractérisation de l'ensemble V. En effet, si l'on considère la formulation (P.O) on aura, qu'un point $\bar{y} \in Y$ appartient à V si et seulement si

$$\inf_{z \in Z} \{\lambda^T G(z,y) + \mu^T H(z,y)\} \leq 0 \quad \forall (\lambda,\mu) \in \Lambda'$$

où

$$\Lambda' = \{(\lambda,\mu) \in R_+^{m_1} \times R^{m_2} : \sum_{i=1}^{m_1} \lambda_i + \sum_{j=1}^{m_2} |\mu_j| > 0\}$$

b) Les contraintes $H(z,y) = 0$ sont non linéaires en y pour z fixé dans Z. Ainsi le problème maître est un problème de programmation non linéaire en variables mixtes. La résolution d'un tel problème est, pour le moins, très ardue.

c) La résolution du problème $\underset{z \in Z}{Min} \{\lambda^T G(z,y) + \mu^T H(z,y)\}$ est très difficile, voire impossible, compte tenu du fait que G(z,y) et H(z,y) n'ont pas une expression permettant d'isoler, d'une manière simple, les variables y des variables z.

Pour contourner ces difficultés, particulièrement (b) et (c), nous nous proposons de donner une formulation, équivalente au problème (P.O), où toutes les contraintes seraient des contraintes d'inégalité, donc de la forme $\tilde{G}(z,y) \leq 0$ où en plus $\tilde{G}(z,y) \equiv \tilde{G}_1(z) + \tilde{G}_2(y)$ avec $\tilde{G}_2(y)$ linéaire. Une telle formulation aura exactement la forme du problème (3.2) avec un problème maître ne possédant que des contraintes linéaires et des coupes faciles à évaluer.

Définition 3.1

Nous dirons que deux problèmes de programmation mathématique sont équivalents, s'ils ont la même fonction économique et si leurs ensembles respectifs de contraintes définissent le même domaine.

Soit (P.3) le problème déduit de (P.2) (Chap. II) en remplaçant les contraintes (2.3) à (2.6) par les contraintes

$$V_I \Big(\sum_{i \in \Gamma_j^-} \sum_{\omega \in S} \gamma_{ij\omega t} \Big) - V_{jt} \leq 0 \quad ; \quad j \in J \, , \, t \in \mathbf{T} \tag{3.3}$$

$$-V_N \Big(\sum_{i \in \Gamma_j^-} \sum_{\omega \in S} \gamma_{ij\omega t} \Big) + V_{jt} \leq 0 \quad ; \quad j \in J \, , \, t \in \mathbf{T} \tag{3.4}$$

$$V_N \Big(\sum_{\tau=0}^{t} \delta_{j\tau} \Big) - V_{jt} \leq 0 \quad ; \quad j \in J \, , \, t \in \mathbf{T} \tag{3.5}$$

$$|V_{jt} - V_{it} + \Delta_{\omega ij} \, x_{ijt}| - M' \Big(1 - \gamma_{ij\omega t} + \sum_{\tau=0}^{t} \delta_{j\tau}\Big) \leq 0 \tag{3.6}$$

$$(i,j) \in E, \; \omega \in S, \; t \in \mathbf{T}$$

où $M' = V_N + \mathrm{M} \, . \, \mathrm{R}$, avec $R = \max\limits_{\omega \in S} \{ \max\limits_{(i,j) \in E} \Delta_{\omega ij} \}$

Théorème 3.5

Les problèmes (P.2) et (P.3) sont équivalents au sens de la définition 3.1.

Preuve:

Afin d'alléger la présentation, posons

$$\rho_{jt} = \sum_{i \in \Gamma_j^-} \sum_{\omega \in S} \gamma_{ij\omega t} \quad et \quad \theta_{jt} = \sum_{\tau=0}^{t} \delta_{j\tau}$$

Les deux problèmes ayant la même fonction économique, pour montrer qu'ils sont équivalents, il suffit de montrer qu'ils ont le même domaine réalisable.

Soient donc D_2 et D_3 les domaines réalisables respectifs des problèmes (P2) et (P3).

a. $D_2 \subset D_3$:

Soit $w = (x,v,\alpha,\delta,\gamma) \in D_2$. Pour montrer que $w \in D_3$, il suffit de montrer que w vérifie les contraintes (3.3) à (3.6).

Remarquons d'abord que si $w \in D_2$ alors,

D'après (2.16), on a $\rho_{jt} = 0$ *ou* 1 ; $j \in J$, $t \in \mathbf{T}$

et d'après (2.18), on a $\theta_{jt} = 0$ *ou* 1 ; $j \in J$, $t \in \mathbf{T}$.

a1. w vérifie (3.3):

D'après (2.3) on a:

$\forall j \in J, \forall t \in \mathbf{T}, \quad \rho_{jt} V_I \leq \rho_{jt} V_{jt}$

Or

$\rho_{jt} V_{jt} \leq V_{jt}$ *car* $\rho_{jt} = 0$ *ou* 1 et $V_{jt} \geq 0$

D'où

$\rho_{jt} V_I \leq V_{jt} \quad \forall j \in J, \forall t \in \mathbf{T}$

Et par conséquent w vérifie (3.3).

a2. w vérifie (3.4):

D'après (2.4) on a:

$\forall j \in J, \forall t \in \mathbf{T}, \quad (1-\rho_{jt})V_{jt} = 0$

D'où:

$V_{jt} = \rho_{jt} V_{jt}$

Or

$0 \leq V_{jt} \leq V_N \quad \forall j \in J, \forall t \in \mathbf{T}$

Donc

$\rho_{jt} V_{jt} \leq \rho_{jt} V_N \quad \forall j \in J, \forall t \in \mathbf{T}$

D'où

$V_{jt} \leq \rho_{jt} V_N \quad \forall j \in J, \forall t \in \mathbf{T}$

Et par conséquent w vérifie (3.4)

a3. w vérifie (3.5):

D'après (2.5) on a:

$\forall j \in J,\ \forall t \in \mathbf{T},\quad \theta_{jt}(V_{jt} - V_N) = 0$

D'où

$\theta_{jt} V_{jt} - \theta_{jt} V_N = 0 \Longrightarrow \theta_{jt} V_{jt} = \theta_{jt} V_N$

Mais

$\theta_{jt} V_{jt} \leq V_{jt}$ car

$\theta_{jt} = 0$ *ou* 1 *et* $V_{jt} \geq 0$

Donc

$\theta_{jt} V_N \leq V_{jt} \quad \forall j \in J,\ \forall t \in \mathbf{T}$

et par conséquent w vérifie (3.5)

a4. w vérifie (3.6)

D'après (2.6), on a:

$\forall (i,j) \in E,\ \forall \omega \in S,\ Vt \in \mathbf{T},\quad \gamma_{ij\omega t}(1-\theta_{jt})\ (V_{it} - V_{jt} - \Delta_{\omega ij}\, x_{ijt}) = 0$

ce qui implique que

$$\gamma_{ij\omega t}(1-\theta_{jt})\ |V_{it} - V_{jt} - \Delta_{\omega ij}\, x_{ijt}| = 0 \qquad (1)$$

Mais

$$(1) \Longrightarrow \gamma_{ij\omega t}\,|V_{it} - V_{jt} - \Delta_{\omega ij}\, x_{ijt}| \leq \gamma_{ij\omega t}|V_{it} - V_{jt} - \Delta_{\omega ij}\, x_{ijt}|\,\theta_{jt}$$
$$\leq |V_{it} - V_{jt} - \Delta_{\omega ij}\, x_{ijt}|\,\theta_{jt}$$
$$\leq M'\,\theta_{jt}$$

On a donc $(1) \Longrightarrow \gamma_{ij\omega t}\,|V_{it} - V_{jt} - \Delta_{\omega ij}\, x_{ijt}| \leq M'\,\theta_{jt}$ (2)

Posons $\gamma_{ij\omega t} = 1 - \gamma'_{ij\omega t}$

alors

$$(2) \Longrightarrow (1-\gamma'_{ij\omega t})|V_{it} - V_{jt} - \Delta_{\omega ij}\, x_{ijt}| \leq M'\theta_{jt}$$

$$\Longrightarrow |V_{it} - V_{jt} - \Delta_{\omega ij}\, x_{ijt}| \leq M'\theta_{jt} + \gamma'_{ij\omega t}|V_{it} - V_{jt} - \Delta_{\omega ij}\, x_{ijt}|$$

$$\leq M'\theta_{jt} + M'\gamma'_{ijwt}$$

D'où

En remplaçant γ'_{ijwt} par $1-\gamma_{ijwt}$, on a:

$$|V_{it} - V_{jt} - \Delta_{wij}\, x_{ijt}| \leq M'(1-\gamma_{ijwt} + \theta_{jt}) .$$

Et par conséquent w vérifie (3.6)

Par a1, a2, a3 et a4, on déduit que $D_2 \subset D_3$.

b. $D_3 \subset D_2$.

Soit $w \in D_3$. Il suffit, encore une fois, de montrer que w vérifie (2.3) à (2.6).

b1. w vérifie (2.3)

D'après (3.3), on a:

$$\forall j \in J,\ \forall t \in \mathbf{T},\quad \rho_{jt}\ V_l \leq V_{jt}$$

D'où

$$\rho_{jt}^2\, V_l \leq \rho_{jt}\, V_{jt}$$

Or

$$\rho_{jt}^2 = \rho_{jt}$$

Donc

$$\rho_{jt}(V_l - V_{jt}) \leq 0$$

Et par conséquent w vérifie (2.3)

b2. w vérifie (2.4)

D'après (3.3) on a:

$$-V_{jt} + \rho_{jt}\, V_l \leq 0 \Longrightarrow -(1-\rho_{jt})\, V_{jt} + (1-\rho_{jt})\rho_{jt}\, V_l \leq 0$$

Or

$$\rho_{jt}(1-\rho_{jt}) = 0$$

Donc

$$-(1-\rho_{jt})\, V_{jt} + \rho_{jt}(1-\rho_{jt})\, V_I \leq 0 \Longrightarrow (1-\rho_{jt})\, V_{jt} \geq 0 \qquad (3)$$

D'autre part, d'après (3.4) on a

$$V_{jt} - \rho_{jt}\, V_N \leq 0 \Longrightarrow (1-\rho_{jt})\, V_{jt} - \rho_{jt}(1-\rho_{jt})\, V_N \leq 0$$

$$\Longrightarrow (1-\rho_{jt})\, V_{jt} \leq 0 \qquad (4)$$

Avec (3) et (4) on a donc

$$(1-\rho_{jt})\, V_{jt} = 0$$

Et par conséquent w vérifie (2.4)

b3. w vérifie (2.5)

On a:

$$V_{jt} \leq V_N \Longrightarrow \theta_{jt}\, V_{jt} \leq \theta_{jt}\, V_N$$

D'où

$$\theta_{jt}(V_{jt} - V_N) \leq 0 \qquad (5)$$

D'autre part, d'après (3.5), on a:

$$\theta_{jt}\, V_N - V_{jt} \leq 0 \Longrightarrow \theta_{jt}\, V_N \leq V_{jt} \Longrightarrow \theta_{jt}^2\, V_N \leq \theta_{jt}\, V_{jt}$$

Or

$$\theta_{jt}^2 = \theta_{jt}$$

D'où

$$\theta_{jt}\,(V_N - V_{jt}) \leq 0 \qquad (6)$$

Avec (5) et (6) on a donc

$$\theta_{jt}(V_N - V_{jt}) = 0$$

Et par conséquent w vérifie (2.5).

b4. w vérifie (2.6)

D'après (3.6) on a:

$$|V_{it} - V_{jt} - \Delta_{\omega ij}\, x_{ijt}| \leq M'(1-\gamma_{ij\omega t} + \theta_{jt}) \qquad (7)$$

Or

$$(7) \Longrightarrow \gamma_{ij\omega t}(1-\theta_{jt})|V_{it} - V_{jt} - \Delta_{\omega ij}\, x_{ijt}| \leq M'(1-\gamma_{ij\omega t} + \theta_{jt})\, \gamma_{ij\omega t}(1-\theta_{jt})$$

Mais, puisque

$$\gamma_{ij\omega t}(1-\gamma_{ij\omega t}) = 0 \text{ et } \theta_{jt}(1-\theta_{jt}) = 0$$

Alors

$$M'(1-\gamma_{ij\omega t} + \theta_{jt})\, \gamma_{ij\omega t}(1-\theta_{jt}) = M'(1-\theta_{jt})\, \gamma_{ij\omega t}(1-\gamma_{ij\omega t}) + M'\gamma_{ij\omega t}\, \theta_{jt}(1-\theta_{jt}) = 0$$

Donc

$$\gamma_{ij\omega t}(1-\theta_{jt})|V_{it} - V_{jt} - \Delta_{\omega ij}\, x_{ijt}| \leq 0$$

et comme tous les facteurs sont non-négatifs, alors

$$\gamma_{ij\omega t}(1-\theta_{jt})|V_{it} - V_{jt} - \Delta_{\omega ij}\, x_{ijt}| = 0$$

Et par conséquent w vérifie (2.6)

Par b1, b2, b3 et b4, on déduit que $D_3 \subset D_2$ □

Par le théorème 3.5, le modèle pour le problème de planification de la distribution a la forme suivante:

$$\begin{aligned} & Min\ f(y) + g(z,y) \\ & sujet\ à \\ & \tilde{G}(z,y) \leq 0 \\ & z \in Z,\ y \in Y\ . \end{aligned} \qquad (P.4)$$

où $\tilde{G}(z,y) \leq 0$ représente l'ensemble des contraintes (2.1), (2.2), (3.3), (3.4), (3.5) et (3.6).

Le problème (P.4) a bien la forme du problème (3.2), il reste à montrer qu'il vérifie les hypothèses nécessaires pour l'application de la méthode de Benders

généralisée. Et c'est le but du théorème qui suit.

Théorème 3.6

Dans le problème (P.4) on a:

a. Z est convexe, $\tilde{G}(z,y)$ et $g(z,y)$ sont convexes sur Z pour y fixé dans Y.

b. L'ensemble $Wy = \{w \in R^m : \exists\, z \in Z$ tel que $\tilde{G}(z,y) \leq w\}$ est fermé pour tout $y \in Y$

c. Soit $\bar{y} \in Y$. Si le problème $\min_{z \in Z}\{g(z,\bar{y}) : \tilde{G}(z,\bar{y}) \leq 0\}$ est réalisable alors il possède un vecteur de multiplicateurs optimaux.

Preuve

a- on a $Z = \{z = (x,v) : Dx = d, 0 \leq x \leq M, 0 \leq v \leq V_N\}$ et cet ensemble est bien évidemment convexe.

$\tilde{G}(z,y)$ est linéaire sur Z pour tout $y \in Y$ donc convexe.

$g(z,y)$ est de la forme az^2 avec $a \geq 0$ donc convexe sur Z.

b- Soit $y \in Y$

Si $Wy = \phi$ alors il est fermé.

Supposons donc que $Wy \neq \phi$ et soit (w_n) une suite de points de Wy telle que $w_n \to w$.

on a

$w_n \in Wy \Longrightarrow \exists\, z_n \in Z$ tel que $\tilde{G}(z_n,y) \leq w_n$.

Or

Z est fermé borné donc compact et par conséquent de la suite (z_n) on peut extraire une sous-suite (z_{n_k}) convergeant vers $z \in Z$.

La suite (w_{n_k}) est une suite extraite de (w_n)

Donc

$$w_{n_k} \to w$$

De plus, $\tilde{G}$ est continue sur Z

Donc

$$\tilde{G}(z_{n_k},y) \to \tilde{G}(z,y)$$

Or

$$\tilde{G}(z_{n_k},y) \leq w_{n_k}$$

Et par passage à la limite, on a:

$$\tilde{G}(z,y) \leq w$$

Donc

$$w \in Wy$$

Et par conséquent Wy est fermé.

c- Pour tout $\overline{y}$ fixé dans Y, on a:

$g(z,\overline{y})$ est continûment différentiable sur Z et $\tilde{G}(z,\overline{y})$ est un vecteur de fonctions linéaires sur Z. Les restrictions sur les contraintes de Kuhn-Tucker sont donc vérifiées pour tout $\overline{y}$ tel que le problème $\min_{z \in Z} \{g(z,\overline{y}) : \tilde{G}(z,\overline{y}) \leq 0\}$ est réalisable.

Or ces conditions sont suffisantes pour l'existence d'un vecteur de multiplicateurs optimaux. □

Par le théorème 3.6, toutes les hypothèses des théorèmes 3.2 et 3.3 sont vérifiées. Comme de plus l'ensemble Y est fini, le théorème 3.4 s'applique également et ainsi notre modèle de planification de la distribution possède toutes les propriétés requises pour l'application de la méthode de Benders généralisée.

Soit alors

$$\bar{v}(y) = \inf_{z \in Z} \{g(z,y) : \tilde{G}(z,y) \leq o\}$$

$$\tilde{V} = \{y : \exists\, z \in Z \text{ tel que } \tilde{G}(z,y) \leq 0\}$$

La projection sur l'espace des variables y du problème (P.4) est:

$$\underset{y \in Y \cap \tilde{V}}{Min}\ f(y) + \tilde{v}(y)$$

Mais, $\tilde{v}(y)$ s'écrit également

$$\tilde{v}(y) = \sup_{u \geq 0} \inf_{z \in Z} \{g(z,y) + u^T \tilde{G}(z,y)\}$$

On en déduit alors le problème maître et le sous-problème suivants:

Problème maître

$$\begin{aligned} & Min\ f(y) + y_0 \\ & \textit{sujet à} \\ & \inf_{z \in Z} \{g(z,y) + u^T \tilde{G}(z,y)\} \leq y_0 \qquad \forall u \geq 0 \\ & \inf_{z \in Z} \{\lambda^T \tilde{G}(z,y)\} \leq 0 \qquad \forall \lambda \in \Lambda \\ & y \in Y \end{aligned} \tag{P.M}$$

Sous-problème $(SP.\bar{y})$

$$\begin{aligned} & Min\ g(z,\bar{y}) \\ & \textit{sujet à} \\ & \tilde{G}(z,\bar{y}) \leq 0 \\ & z \in Z \end{aligned} \tag{$SP.\bar{y}$}$$

Signalons enfin que la contrainte (2.17) peut être remplacée par la contrainte equivalente (3.17) suivante:

$$\sum_{i \in \Gamma_j^+} \sum_{\omega \in S} \gamma_{ji\omega t} \leq M'' \sum_{i \in \Gamma_j^-} \sum_{\omega \in S} \gamma_{ji\omega t}\ ;\ j \in J - J_t\ ,\ t \in \mathbf{T}\ .$$

Où M" est une constante arbitrairement grande.

3.4 Résumé

Dans ce chapitre, nous avons vu que même si notre modèle original se prêtait naturellement à l'application de la méthode de Benders généralisée, il n'en demeurait pas moins que la forme de ses contraintes (non linéarité) rendait l'utilisation de la méthode difficile. C'est ce qui a motivé l'élaboration d'un problème équivalent présentant une forme beaucoup plus simple.

Nous avons enfin montré que notre nouveau modèle possédait toutes les propriétés théoriques requises pour l'application de la méthode de Benders généralisée.

Notre modèle de référence par la suite sera le suivant:

$$Min\ z = f_1(\alpha) + f_2(\delta) + f_3(\gamma) + h(x,\gamma)$$

sujet à

$$\sum_{j\in\Gamma_i^+} x_{ijt} - \sum_{c\in C} c\alpha_{cit} \le 0\ ;\ i\in I,\ t\in \mathbf{T} \tag{3.1}$$

$$x_{ijt} - \sum_{\omega\in S} U_\omega\, \gamma_{ij\omega t} \le 0,\ (i,j)\in E,\ t\in \mathbf{T} \tag{3.2}$$

$$-V_{jt} + V_I \sum_{i\in\Gamma_j^-} \sum_{\omega\in S} \gamma_{ij\omega t} \le 0\ ;\ j\in J,\ t\in \mathbf{T} \tag{3.3}$$

$$V_{jt} - V_N \sum_{i\in\Gamma_j^-} \sum_{\omega\in S} \gamma_{ij\omega t} \le 0\ ;\ j\in J,\ t\in \mathbf{T} \tag{3.4}$$

$$-V_{jt} + V_N \sum_{T=0}^{t} \delta_{jT} \le 0\ ;\ j\in J,\ t\in \mathbf{T} \tag{3.5}$$

$$|V_{jt} - V_{it} + \Delta_{\omega ij}\, x_{ijt}| - M'(1-\gamma_{ij\omega t} + \sum_{\tau=0}^{t} \delta_{j\tau}) \le 0 \qquad (3.6)$$

$$(i,j)\in E,\ \omega\in S,\ t\in \mathbf{T}$$

$$\sum_{i\in \Gamma_j^-} x_{ijt} - \sum_{i\in \Gamma_j^+} x_{jit} = d_{jt}\ ;\ j\in J,\ t\in \mathbf{T} \qquad (3.7)$$

$$0 \le x_{ijt} \le M\ \ ;\ \ (i,j)\in E,\ t\in \mathbf{T} \qquad (3.8)$$

$$0 \le V_{jt} \le V_N\ \ ;\ \ j\in J,\ t\in \mathbf{T} \qquad (3.9)$$

$$V_{it} = V_N\ \ ;\ \ i\in I,\ t\in \mathbf{T} \qquad (3.10)$$

$$\alpha_{cit} - \alpha_{cit-1} \ge 0\ \ ;\ \ c\in C,\ i\in I,\ t\in \mathbf{T} \qquad (3.11)$$

$$\sum_{i\in I}\sum_{c\in C} c\alpha_{cit} \ge \sum_{j\in J} d_{jt}\ \ ;\ \ t\in \mathbf{T} \qquad (3.12)$$

$$\sum_{c\in C} \alpha_{cit} \le b_i\ \ ;\ \ i\in I,\ t\in \mathbf{T} \qquad (3.13)$$

$$\sum_{\omega\in S} (\gamma_{ij\omega t} + \gamma_{ji\omega t}) \le 1\ \ ;\ \ (i,j)\in F,\ t\in \mathbf{T} \qquad (3.14)$$

$$\sum_{i\in \Gamma_j^-}\sum_{\omega\in S} \gamma_{ij\omega t} = 1\ \ ;\ \ j\in J_t\ ,\ t\in \mathbf{T} \qquad (3.15)$$

$$\sum_{i\in\Gamma_j^-}\sum_{\omega\in S}\gamma_{ij\omega t}\le 1\ ;\ j\in J,\ t\in\mathbf{T} \tag{3.16}$$

$$\sum_{i\in\Gamma_j^+}\sum_{\omega\in S}\gamma_{ji\omega t}\le M''\sum_{i\in\Gamma_j^-}\sum_{\omega\in S}\gamma_{ij\omega t}\ ;\ j\in J-J_t\ ,\ t\in\mathbf{T} \tag{3.17}$$

$$\sum_{t=0}^{T}\delta_{jt}\le 1\ ;\ j\in J \tag{3.18}$$

$$\delta_{jt}=0\ ou\ 1\ ;\ j\in J,\ t\in\mathbf{T} \tag{3.19}$$

$$\alpha_{cit}=0,1,\ldots,\ b_i\ ;\ c\in C,\ i\in I,\ t\in\mathbf{T} \tag{3.20}$$

$$\gamma_{ij\omega t}=0\ ou\ 1\ ;\ (i,j)\in E,\ \omega\in S,\ t\in\mathbf{T} \tag{3.21}$$

$$\gamma\in\mathbf{\Gamma} \tag{3.22}$$

Remarque 3.2

Pour utiliser la procédure de résolution de la méthode de Benders généralisée, il faudra apporter des réponses aux questions suivantes:

1. Comment déterminer une solution initiale $\bar{y}\in Y\cap V$?
2. Comment résoudre le sous-problème $(SP.\bar{y})$, déterminer les coupes et les évaluer ?
3. Comment résoudre le problème maître?

Les chapitres qui suivent proposent une solution à chacun des problèmes 1, 2 et 3 ci-dessus.

CHAPITRE IV

CONSTRUCTION D'UNE SOLUTION INITIALE REALISABLE

Dans l'étape 1 de la procédure de résolution par la méthode de Benders généralisée, il est supposé qu'une solution $\overline{y} \in Y \cap V$ était disponible. L'existence de cette solution permet, d'une part, d'identifier une borne supérieure sur la valeur optimale du problème original et, d'autre part, de générer une première coupe pour le problème maître relaxé. Mais, l'aspect le plus important réside dans le fait que la connaissance d'une bonne solution réalisable peut influencer considérablement le temps de calcul nécessaire pour la résolution du problème. Nous nous efforcerons donc, dans ce chapitre, de construire une bonne solution réalisable.

Cette construction se fera en deux phases.

Dans un premier temps, nous construirons un réseau de lignes où toutes les demandes sont satisfaites sans dépasser la capacité maximum des postes. En second lieu, nous déterminerons, pour chaque connexion, le type de conducteur adéquat puis nous installerons les régulateurs là où c'est nécessaire de façon à maintenir les tensions dans les limites voulues.

4.1 Construction du réseau de ligne

Rappelons, qu'à chaque période, le réseau de distribution est constitué d'un ensemble d'arborescences dont les racines sont des postes.

Ainsi, pour construire le réseau de ligne, nous procédons de la façon suivante:

Partant du réseau réel tel qu'il existe au début de l'horizon de planification (t=0), on affecte à chaque point de charge j sa demande maximale d_j et à chaque poste i sa capacité maximale $\overline{c_i}$ puis on partitionne l'ensemble des arborescences, constituant le réseau, en trois classes:

. Les arborescences saturées (voir définitions plus loin) qui seront retirées du réseau.

. Les arborescences "surchargées" (voir définitions plus loin) qu'on sature en détachant certains points de charge. Les demandes détachées feront partie de l'ensemble des points de charge à alimenter à la période t=1.

. Les arborescences "sous-chargées" (voir définitions plus loin) qu'on garde pour la période suivante où elles seront éventuellement saturées.

A la période t=1, on aura donc un ensemble de points de charge détachés à la période t=0, un ensemble de points de charge appartenant à des arborescences sous-chargées provenant de la période précédente et enfin un ensemble de points de charge qui doivent être alimentés pour la première fois à la période 1. Il s'agira alors d'alimenter tous les points de charge décrits plus haut sans créer d'arborescence surchargée.

Une fois cette opération terminée, on fera, comme précédemment, une classification des arborescences obtenues et on recommence le processus jusqu'à la dernière période de planification.

Remarquons, qu'à partir de la première période, on ne rencontrera plus d'arborescences surchargées. La procédure détachement ne sera donc appliquée qu'à la période de départ.

Soit alors,

A_i^t = l'arborescence de racine i construite à la période t.

$\overline{c}_i$ = la capacité maximum du poste i

δ = une constante fixée

$d_j = \max_{0 \le t \le T} d_{jt}$, $j \in J$

$b_i^t = \sum_{j \in A_i^t} d_j$

$\mu_i^t = \overline{c}_i - b_i^t$

Définition 4.1.1

Une arborescence A_i^t sera dite saturée si $0 \le \mu_i^t \le \delta$. Elle sera dite surchargée si $\mu_i^t < 0$ et sous-chargée si $\mu_i^t > \delta$. Dans le dernier cas, on notera $\underline{A}_i^t$.

Définition 4.1.2

On parlera de graphe restreint à une étape donnée du problème pour désigner le graphe obtenu de $G(I \cup J, E)$ après suppression de toutes les arborescences déjà saturées ainsi que les arcs incidents aux noeuds appartenant à ces arborescences.

4.1.1 Procédure détachement

Soit,

A_i^0 = une arborescence surchargée (i.e. $\mu_i^0 < 0$)

n_i = la longueur du plus long chemin dans A_i^0 (le plus long chemin est celui qui contient le plus d'arcs).

B_i^n = $\{j \in A_i^0$: le chemin de i à j est de longueur n $\}$

$L_j = \{j\} \cup \{k \in A_i^0 : \exists$ un chemin de j à k dans $A_i^0\}$

= sous-arborescence de A_i^0 de racine j,

$$d_j^L = \sum_{k \in L_j} d_k$$

Ψ_j = nombre de prédécesseurs de j dans le graphe restreint.

Dans cette procédure, on détermine, dans un premier temps, le niveau à partir duquel le détachement devra se faire (en commençant par les noeuds appartenant à $B_i^{n_i}$ et en remontant dans l'arborescence). En second lieu, une fois le niveau déterminé, on détachera les points de charge qui offrent le plus de possibilités pour les alimenter par la suite.

Procédure DETACH

Etape 0: initialisation

Poser $n = n_i$ et $D_i = \phi$

D_i représente l'ensemble des points de charge détachés.

Etape 1: choix du niveau

Si

$$\sum_{j \in B_i^n} d_j^L < -\mu_i^0 \quad \text{alors aller à l'étape 2}$$

(le détachement des points de charge appartenant à B_i^n n'est pas suffisant pour rendre l'arborescence non surchargée).

Sinon,

aller à l'étape 3.

Etape 2: changement de niveau

Faire n = n -1 et aller à l'étape 1.

Etape 3: choix des points de charge à détacher

Pour $j \in B_i^n$, ordonner Ψ_j par ordre décroissant, soit

$$\Psi_{j_1} \geq \Psi_{j_2} \geq \cdots \geq \Psi_{j_q}$$

et déterminer le plus petit $\bar{k}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{\bar{k}} d_{j_k}^L \geq \mu_i^0.$$

Aller à l'étape 4.

Etape 4: arrêt

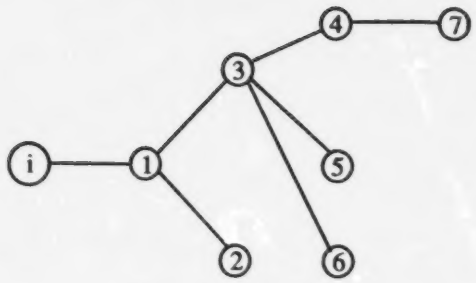
Poser $A_i^0 = A_i^0 - \bigcup_{k=1}^{\bar{k}} L_{j_k}$

$$D_i = D_i + \bigcup_{k=1}^{\bar{k}} L_{j_k}.$$

Terminer.

Illustration de la procédure DETACH

Supposons qu'on a l'arborescence saturé suivante



où $\overline{C}_i = 155$

et d_j et Ψ_j sont donnés par le tableau suivant

	1	2	3	4	5	6	7
d_j	50	45	40	20	15	10	25
Ψ_j	3	5	2	6	2	3	3

On a:

$$n_i = 4 \; ; \; \mu_i^0 = \overline{C}_i - \sum_{j \in A_i^0} d_j = -50$$

$B_i^1 = \{1\}$; $B_i^2 = \{2,3\}$; $B_i^3 = \{4,5,6\}$; $B_i^4 = \{7\}$

$L_1 = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ $\qquad$ $L_4 = \{4,7\}$

$L_2 = \{2\}$ $\qquad$ $L_5 = \{5\}$

$L_3 = \{3,4,5,6,7\}$ $\qquad$ $L_6 = \{6\}$

$L_7 = \{7\}$

$$d_1^L = \sum_{j=1}^{7} d_j = 205$$

$$d_2^L = d_2 = 45$$

$$d_3^L = \sum_{j=3}^{7} d_j = 110$$

$d_4^L = d_4 + d_7 = 45$

$d_5^L = d_5 = 15$

$d_6^L = d_6 = 10$

$d_7^L = d_7 = 25$

l'application de la procédure donne:

n = 4

$d_7^L = 25 < 50 \Longrightarrow$ changement de niveau

n = 3

$\sum_{j \in B_i^3} d_j^L = 70 > 50 \Longrightarrow$ détachement

$\Psi_4 > \Psi_6 > \Psi_5$

on a

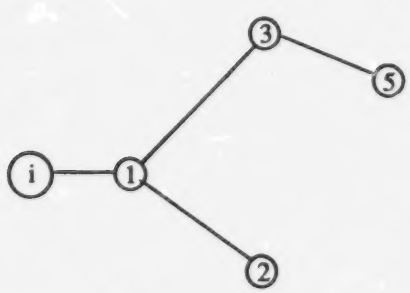
$d_4^L + d_6^L = 55 > 50$

d'où

$A_i^0 = A_i^0 - (L_4 \cup L_6)$

$D_i = \{4,6,7\}$.

Ainsi les points de charge 4, 6 et 7 sont détachés et la nouvelle arborescence est:



4.1.2 Procédure alimentation

Cette procédure a pour fonction de résoudre, pour chaque période $t \geq 1$, le problème qui consiste à alimenter, au moindre coût un certain nombre de points de charge à partir d'un certain nombre de postes source.

Pour la période t, ce problème se formule de la façon suivante:

$$Min \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=m+1}^{r} c_{ijt}\, \delta_{ijt}$$

sujet à

$$\sum_{i=1}^{r} x_{ijt} - \sum_{i=m+1}^{r} x_{jit} = d_j \;\; ; \;\; j \in \tilde{J}_t = \{m+1, \ldots, r\}$$

$$\sum_{j=m+1}^{r} x_{ijt} \leq s_{it} \;\; ; \;\; i \in \tilde{I}_t = \{1, \ldots, m\}$$

$$(1-\delta_{ijt})\, x_{ijt} = 0 \;\; ; \;\; 1 \leq i \leq r \,,\; m+1 \leq j \leq r \,. \qquad \text{(P.A)}$$

$$\sum_{i=1}^{r} \delta_{ijt} = 1 \;\; ; \;\; j \in \tilde{J}_t$$

$$x_{ijt} \geq 0 \;;\; 1 \leq i \leq r \;;\; m+1 \leq j \leq r \,.$$

$$\delta_{ijt} = 0 \text{ ou } 1 \;;\; 1 \leq i \leq r \;;\; m+1 \leq j \leq r \,.$$

où

$\tilde{I}_t$ = l'ensemble des postes classifiés comme non saturés au début de la période t.

$\tilde{J}_t$ = l'ensemble des points de charge à alimenter pendant la période t. (Cet ensemble ne contient pas les points de charge appartenant à des arborescences déjà saturées).

c_{ijt} = le coût de la connexion (i,j) à la période t

s_{it} = la disponibilité résiduelle maximum du poste i au début de la période t

x_{ijt} = le flot de puissance circulant dans l'arc (i,j) pendant la période t

$$\delta_{ijt} = \begin{cases} 1 & \textit{si l'arc (i,j) est retenu à la période t} \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Si l'on pose $\Omega_t = \bigcup_{i \in I_t} A_i^t$, les coûts c_{ijt} peuvent être définis de la façon suivante:

i) si $(i,j) \in F$ et

si $(i,j) \in \Omega_t$ alors $c_{ijt} = c_{jit} = 0$

si $(i,j) \notin \Omega_t$ alors $c_{ijt} = c_{jit} = l_{ij} \sum_{\omega \in S} \frac{K'_{\omega t}}{|s|}$

ii) si $(i,j) \in \overline{F}$ et

si $(i,j) \in \Omega_t$ alors $c_{ijt} = 0$

si $(i,j) \notin \Omega_t$ alors $c_{ijt} = l_{ij} \sum_{\omega \in S} \frac{K'_{\omega t}}{|s|}$

iii) si $(i,j) \notin E$ alors $c_{ijt} = +\infty$.

Remarque 4.1

Les coûts ont été définis de façon à privilégier les connexions déjà existantes. Pour les autres connexions, dans le cas où l'arc les définissant est un arc admissible, nous avons considéré un coût moyen car, à priori, nous ne connaissons pas le type de ligne qui sera utilisé.

Compte tenu de la remarque 4.1, nous ne chercherons pas une solution optimale pour le problème (P.A), mais plutôt une bonne solution réalisable.

Nous proposons, dans la section qui suit, une méthode heuristique permettant d'obtenir une bonne solution réalisable, alors qu'une méthode exacte pour trouver une solution optimale sera exposée dans l'annexe A.

Détermination d'une bonne solution réalisable pour (P.A)

La méthode que nous considérons repose sur les principes suivants:

a) Les seules vraies sources d'alimentation ne peuvent être que des postes.

b) Au cours du processus, lorsqu'un point de charge est alimenté, on le considère comme jumelé avec son poste source pour constituer un nouveau poste (en remplacement du poste source) avec révision des coûts et des disponibilités.
(A remarquer donc que, d'une itération à l'autre, la taille du problème diminue).

c) Un poste qui ne peut plus satisfaire aucune demande cesse d'être considéré comme une source.

d) Les postes ayant la plus grande disponibilité seront débités en priorité, quand cela est "profitable", de façon à laisser plus de flexibilité aux points de charge qui restent à alimenter.

e) A chaque itération un poste à débiter est choisi. Ce choix étant fait, on calculera, pour chaque point de charge non encore alimenté, un poids qu'on appelera coût moyen. L'affectation se fera alors pour le point de charge ayant le plus petit poids.

L'algorithme s'arrête quand le problème n'est pas réalisable ou quand tous les points de charge sont alimentés.

Algorithme SOLREA

Pour alléger la notation, nous laisserons tomber l'indice t en gardant à l'esprit que tout ce qu'on fait concerne la période t.

Etape 0: Initialisation

Soit,

$\tilde{I} = \{0_1, \ldots, 0_m\}$ l'ensemble des postes.

$\tilde{J} = \{e_1, \ldots, e_m\}$ l'ensemble des points de charge.

Poser Z=0 (Z est la valeur de la fonction économique).

Etape 1: choix du poste à débiter

Parmi les postes non encore supprimés, choisir celui qui a la plus grande disponibilité. Soit O_q un tel poste.

Etape 2: réalisabilité du problème

Soit $\bar{J}$ l'ensemble des points de charge non encore alimentés. Déterminer $k \in \bar{J}$ tel que $d_k = \max_{j \in \bar{J}} d_j$.

Soit O_p le poste ayant la plus grande disponibilité après O_q.

Si $d_k > s_q$. Terminer, le problème n'est pas réalisable.

Si $S_p < d_k \leq s_q$, aller à l'étape 5

Si $d_k \leq s_p$, aller à l'étape 3.

Etape 3: calcul du poids des points de charge

Calculer le poids h_j de tout point de charge $j \in \bar{J}$ non encore alimenté (voir la procédure POIDS ci-dessous).

Deux situations peuvent se présenter:

3a- Tous les poids sont nuls. Dans ce cas aller à l'étape 6.

3b- Au moins un point de charge a un poids strictement positif. Dans ce cas aller à l'étape 4.

Etape 4: choix du point de charge à alimenter

Déterminer k tel que $h_k = \min_{j \in \bar{J}} h_j$. Aller à l'étape 5.

Etape 5: alimentation

5a- Etablir la connexion (O_q, e_k) et poser $Z = Z + c_{qk}$

5b- Supprimer le point de charge e_k. (i.e poser $\overline{J} = \overline{J} - \{e_k\}$)

5c- Poser $s_q = s_q - d_k$. Supprimer O_q si $s_q < d_j \quad \forall j \in \overline{J}$.

5d- Si $\overline{J} \neq \phi$ alors reviser les coûts c_{qj} (voir la procédure révision des coûts ci-dessous) et revenir à l'étape 1.
Si $\overline{J} = \phi$, terminer.

Etape 6: changement de poste

Choisir le poste ayant la plus grande disponibilité après O_q et revenir à l'étape 3. □

Remarque 4.1

Dans l'étape 2, et pour des cas très particuliers, il se pourrait que l'algorithme s'arrête pour non-réalisabilité alors que le problème possède, en réalité, une solution réalisable.

On peut alors adopter différentes attitudes:

i- On décide que l'algorithme a échoué et on utilise une autre méthode.

ii- On vérifie, si effectivement, le problème est non réalisable en utilisant la procédure suivante qui consiste à alimenter les points de charge en minimisant les disponibilités résiduelles des postes tout en ignorant les coûts.

Il s'agit alors de résoudre les m problèmes

$$(P_i): \underset{\lambda^i}{Max}\{v_i = \sum_{j \in J_i} \lambda_j^i d_j : \sum_{j \in J_i} \lambda_j^i d_j \leq s_i \ , \ \lambda_j^i = 0 \ \ ou \ \ 1\}$$

où

$$J_i = \{j \in J : \exists \ un \ chemin \ de \ i \ à \ j\} \ .$$

Soit

$\overline{\lambda}^i$ et ∇_i la solution optimale et la valeur optimale du problème (P_i) et

$s_k - \nabla_k = \underset{1 \leq i \leq m}{Min} \{s_i - \nabla_i\}$

Alors, alimenter, par le poste k, les points de charge j tel que $\overline{\lambda}_j^k = 1$.

Recommencer alors le processus, en supprimant le poste k et les points de charge qu'il alimente.

Si tous les postes sont épuisés et qu'il reste des points de charge non alimentés alors cela signifiera que le problème est effectivement non réalisable.

Procédure pour réviser les coûts

S'il a été décidé d'établir la connexion (O_q, e_k), on revise alors les coûts de la façon suivante:

Pour tout $j \in \overline{J}$,

si $d_j > s_q$ alors poser $c_{qj} = +\infty$

si $d_j \leq s_q$ alors poser $c_{qj} = \min\{c_{qj}, c_{kj}\}$.

Procédure pour déterminer les poids

Soit O_q le poste choisi et s_q sa disponibilité

soit $j \in \overline{J}$, on pose:

$$c_{i,j} = \min_{i \in \overline{I}} c_{ij}$$

où $\overline{I}$ est l'ensemble des postes non encore supprimés

et

$$r_j = c_{qj} - c_{i,j}$$

Etape 1:

Calculer r_j pour tout $j \in \overline{J}$.

Si $r_j = 0$, $\forall j \in \overline{J}$, alors poser $h_j = 0$, $\forall j \in \overline{J}$

(Les poids sont tous nuls) et la procédure s'arrête.

Sinon aller à l'étape 2.

Etape 2:

2a- Il existe un $j_o \in \overline{J}$, unique, tel que $r_{j_o} > 0$.

Dans ce cas poser

$$h_{j_o} = r_{j_o} \quad \text{et} \quad h_j = 0,\ \forall j \in \overline{J} - \{j_o\}\ .$$

Et la procédure s'arrête.

2b- $|\{j \in \overline{J} : r_j > 0\}| \geq 2$.

Sans perte de généralité on peut supposer que

$\forall i, j \in \overline{J}\ ,\ i < j \Longrightarrow d_i \leq d_j\ .$

Alors,

pour tout $j \in \overline{J}$ tel que $r_j > 0$, déterminer le plus grand k, soit k(j), tel que

$$d_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k(j)} d_i \leq s_q.$$

Soit c(j) le coût total d'alimentation, des points de charge j, 1, 2,..., k(j), par le poste O_q.

$$c(j) = \overline{c}_j + \sum_{i=1}^{k(j)} \overline{c}_i$$

où

$$\overline{c}_j = c_{qj}$$

$$\overline{c}_{i_1} = \min_{1 \leq i \leq k(j)} \{\min\{c_{qi}, c_{ji}\}\}$$

$$\overline{c}_{i_s} = \min_{\substack{1 \leq i \leq k(j) \\ i \neq i_1, \cdots, i_s}} \{\min\{c_{qi}, c_{ij}, c_{i_1 i}, \ldots, c_{i_{s-1} i}\}\}\ ;\ 2 \leq s \leq k(j)$$

Poser alors

$$h_j = \frac{c(j)}{k(j) + \varepsilon}$$

où

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 & si \quad j \leq k(j) \\ 1 & si \quad j > k(j) \end{cases}.$$

et la procédure s'arrête. □

Remarque 4.2

i) La détermination des $\overline{c}_i$ se fait très facilement par balayage de la colonne i dans la matrice des coûts.

ii) On trouvera, dans l'annexe, une illustration de l'algorithme SOLREA.

4.1.3 Algorithme général pour la phase 1

L'algorithme résumant la méthode pour construire le réseau de lignes s'énonce comme suit:

Algorithme RESEAU

Etape 0: initialisation

Initialiser tout ce qui est nécessaire. Poser t=0 et aller à l'étape 1.

Etape 1:

Si t=0 alors,

1.a Faire une classification des arborescences du réseau.

1.b Appeler la procédure DETACH si nécessaire.

1.c Poser t = t+1. Aller à l'étape 3.

Sinon

Aller à l'étape 2.

Etape 2:

- faire une classification des arborescences du réseau.
- Poser t=t+1. Aller à l'étape 3.

Etape 3:

- Utiliser l'algorithme SOLREA pour alimenter les points de charge nécessitant une alimentation.
- Aller à l'étape 4.

Etape 4:

Si $t \geq T$ alors terminer.

Sinon revenir à l'étape 1.

4.2 Réalisabilité du réseau

La phase 1, décrite plus haut, nous donne une configuration du réseau pour les différentes périodes de l'horizon de planification.

Pour que ce réseau soit réalisable, il faut,

i) déterminer le nombre et la capacité des transformateurs à installer dans chaque poste ainsi que la période d'installation de ces transformateurs

ii) déterminer, pour chaque ligne, le type de conducteur adéquat ainsi que la période de son installation

iii) déterminer l'emplacement des régulateurs ainsi que les périodes de leur installation.

4.2.1 Résolution du problème des transformateurs

Supposons que la première phase est complétée et soit i un poste dont l'arborescence associée à la période t est A_i^t.

Soit $\phi_{it} = \sum_{j \in A_i^t} d_{jt}$.

ϕ_{it} représente la demande que doit alimenter le poste i pendant la période t. Alors, pour déterminer le nombre et la capacité des transformateurs à installer dans le poste i, à chaque période, il suffit de résoudre le problème (Pi) suivant:

$$Min \sum_{t=1}^{T} \sum_{c \in C} K_{cit} (\alpha_{cit} - \alpha_{cit-1})$$

sujet à

$$\sum_{c \in C} c\alpha_{cit} \geq \phi_{it} \qquad t \in \mathbf{T}$$

$$\sum_{c \in C} \alpha_{cit} \leq b_i \qquad t \in \mathbf{T}$$

$$\alpha_{cit} \geq \alpha_{cit-1} \qquad c \in C \ , \ t \in \mathbf{T}$$

$$\alpha_{cit} \geq 0, \quad entier \qquad c \in C \ , \ t \in \mathbf{T} .$$

Remarque 4.3

(Pi) est un problème de programmation linéaire en nombres entiers de petite taille. Sa résolution, qui est très simple, fournit le meilleur investissement permettant de satisfaire la demande attaché au poste i.

4.2.2 Résolution du problème des conducteurs

Considérons une ligne (i,j) qui doit être utilisée à une période donnée de l'horizon de planification. Soit t_o la période où la ligne (i,j) est utilisée pour la première fois.

On a, $t_o = \min\{t \in \mathbf{T} : x_{ijt} > 0\}$.

Soit enfin $\overline{X}_{ij} = \max_{t \in \mathbf{T}} x_{ijt}$, le flot de puissance maximum qui devrait circuler dans la ligne (i,j).

En posant

$$S_{ij} = \{\omega : U_\omega - \overline{X}_{ij} \geq 0\}$$

et en considérant

$$\varpi \text{ tel que } U_{\varpi} = \min_{\omega \in S_{ij}} U_{\omega} ,$$

alors,

la ligne (i,j) de type ϖ installé à la période t_o permettra, sans dépasser sa capacité, l'écoulement de la puissance x_{ijt}, $\forall t \geq t_o$, $t \in \mathbf{T}$.

Ainsi, on aura $\gamma_{\varpi ijt} = 1 \quad \forall t \geq t_o$ et $\gamma_{\omega ijt} = 0 \quad \forall t < t_o$, $\forall \omega \in S$.

4.2.3 Résolution du problème de tension

Une fois que les étapes 4.1 et 4.2.2 sont complétées, la configuration du réseau ainsi que le type des conducteurs sont alors connus.

Pour déterminer l'emplacement des régulateurs de tension ainsi que la période de leur installation, on procède de la façon suivante:

Partant de la période t=o à t=T, on considère, une à une, les arborescences A_i^t appartenant au réseau à la période t.

En descendant dans l'arborescence A_i^t, de la racine vers les noeuds pendants, on calcule par la relation (2.6) la tension V_{jt} pour tout $j \in A_i^t$.

Au premier point de charge j rencontré tel que $V_{jt} < V_l$, on installera un régulateur de tension et on posera $V_{jt'} = V_N \quad \forall t' \geq t$.

A noter donc que lorsqu'un régulateur est installé en un point de charge j, à une période t donné, la tension en ce point de charge est fixée à V_N pour le reste de l'horizon de planification.

4.3 Autres méthodes

Il existe bien évidemment d'autres méthodes pour générer une solution de départ.

Signalons, entre autre, qu'on pourrait, après la procédure DETACH, appliquer la procédure alimentation pour une seule période en considérant tous les points de charge qui doivent être alimentés pour la première fois à la période t=1 ou t=2, ... ou t=T.

Cette méthode aura l'avantage de prévenir ce qui vient mais présentera l'inconvénient de faire une installation trop rapide de certaines lignes.

Signalons également la variante suivante pour la procédure DETACH.

Soit $P^{(n)}$ le problème suivant:

$$Max \sum_{j \in B_i^n} \lambda_j (\psi_j - d_j^L)$$

sujet à

$$\sum_{j \in B_i^n} \lambda_j d_j^L \geq - \mu_i^o \qquad P^{(n)}$$

$$\lambda_j = 0 \text{ ou } 1$$

$$u \geq 0 \text{ entier}.$$

La procédure DETACH1 s'énoncerait alors comme suit:

Etape 0: initialisation

Poser $n = n_i$, $D_i = \phi$

Etape 1: choix du niveau

Si le problème $P^{(n)}$ n'est pas réalisable alors aller à l'étape 2.

Sinon aller à l'étape 3.

Etape 2: changement de niveau

faire n = n-1 et aller à l'étape 1.

Etape 3: choix des points de charge à détacher

Résoudre $P^{(n)}$. Soit $\bar{\lambda}$ une solution réalisable optimale et $Q_i^n = \{j \in B_i^n : \bar{\lambda}_j = 1\}$

Aller à l'étape 4.

Etape 4: arrêt

Poser $A_i^o = A_i^o - \bigcup_{j \in Q_i^n} L_j$

$$D_i = D_i + \bigcup_{j \in Q_i^n} L_j$$

terminer. □

Cette variante a l'avantage de tenir compte non seulement des possibilités d'alimentation des points de charge détachés mais également de minimiser la disponibilité résiduelle du poste i après le détachement.

Elle présente, par contre, l'inconvénient d'avoir à résoudre au moins un problème $P^{(n)}$ avant de trouver la solution.

Signalons enfin, que dans la procédure alimentation, au lieu de défaire les arborescences sous-chargées, on pourrait les garder telles quelles et essayer de les compléter en y greffant les nouveaux points de charge.

Cette approche peut réduire de beaucoup le temps de calcul mais escamote l'aspect dynamique du problème.

CHAPITRE V

RESOLUTION DU SOUS PROBLEME ET DETERMINATION DES COUPES

Comme nous l'avions vu au chapitre III, le sous problème joue un rôle très important dans le processus de résolution de la méthode de Benders généralisée. Il sert, d'une part, à tester la réalisabilité d'une solution du problème maître relaxé et d'autre part, à fournir les outils nécessaires pour générer la coupe pertinente quand cela s'avère nécessaire.

Dans ce chapitre, nous étudierons, dans un premier temps, les propriétés du sous problème pour en déduire une méthode de résolution et ensuite nous donnerons les outils nécessaires pour la génération des coupes.

5.1 Expression et propriétés du sous problème

Soit une solution $\overline{y} \in Y$ au problème maître relaxé. En rappelant que $\overline{y} = (\overline{\alpha}, \overline{\delta}, \overline{\gamma})$ et en posant :

$$\bar{\beta}_{it} = \sum_{c \in C} c\bar{\alpha}_{cit}$$

$$\bar{\chi}_{ijt} = \sum_{\omega \in S} U_\omega \, \bar{\gamma}_{ij\omega t}$$

$$\bar{\theta}_{jt} = \sum_{\tau=0}^{t} \bar{\delta}_{j\tau}$$

et $\quad \bar{\rho}_{jt} = \sum_{i \in \Gamma_j^-} \sum_{\omega \in S} \bar{\gamma}_{ij\omega t}$,

Le sous problème $(SP.\bar{y})$ a alors la forme suivante :

$$Min\ g(z,\bar{y}) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{(i,j) \in E} \sum_{\omega \in S} \sqrt{3}\, \frac{a_l}{V_N}\, \Delta_{\omega ij}\, \bar{\gamma}_{ij\omega t}\, (x_{ijt})^2$$

sujet à:

$$\sum_{j \in \Gamma_i^+} x_{ijt} - \bar{\beta}_{it} \leq 0 \quad ; \quad i \in I,\ t \in \mathbf{T} \tag{5.1}$$

$$x_{ijt} - \bar{\chi}_{ijt} \leq 0 \quad ; \quad (i,j) \in E,\ t \in \mathbf{T} \tag{5.2}$$

$$-V_{jt} + \bar{\rho}_{jt}\, V_l \leq 0 \quad ; \quad j \in J,\ t \in \mathbf{T} \tag{5.3}$$

$$V_{jt} - \bar{\rho}_{jt}\, V_N \leq 0 \quad ; \quad j \in J,\ t \in \mathbf{T} \tag{5.4}$$

$$-V_{jt} + \theta_{jt}\, V_N \leq 0 \quad ; \quad j \in J,\ t \in \mathbf{T} \tag{5.5}$$

$$V_{jt} - V_{it} + \Delta_{\omega ij}\, x_{ijt} - M'(1 - \bar{\gamma}_{ij\omega t} + \bar{\theta}_{jt}) \leq 0 \tag{5.6}$$

$$V_{it} - V_{jt} - \Delta_{\omega ij}\, x_{ijt} - M'(1-\bar{\gamma}_{ij\omega t} + \bar{\theta}_{jt}) \leq 0 \qquad (5.7)$$

$$(i,j)\in E,\ \omega\in S,\ t\in \mathbf{T}.$$

$$\sum_{i\in \Gamma_j^-} x_{ijt} - \sum_{i\in \Gamma_j^+} x_{jit} = d_{jt}\ ;\ j\in J,\ t\in \mathbf{T} \qquad (5.8)$$

$$0 \leq x_{ijt} \leq M \quad ; \quad (i,j)\in E,\ t\in \mathbf{T} \qquad (5.9)$$

$$0 \leq V_{jt} \leq V_N \quad ; \quad j\in J,\ t\in \mathbf{T} \qquad (5.10)$$

$$V_{it} = V_N \quad ; \quad i\in I,\ t\in \mathbf{T} \qquad (5.11)$$

Remarque 5.1

Les ensembles de contraintes (5.6) et (5.7) sont constitués pour une large part de contraintes redondantes. Notons, par exemple, que pour tout $(i,j)\in E$, tout $t\in \mathbf{T}$ et tout $\omega\in S$ tels que $\bar{\gamma}_{ij\omega t} = 0$, (5.6) et (5.7) deviennent:

$$|V_{it} - V_{jt} - \Delta_{\omega ij}\, x_{ijt}| \leq M'(1+\bar{\theta}_{jt})$$

et ceci est toujours vérifié.

En fait, pour tout $(i,j)\in E$, et tout $t\in \mathbf{T}$, il existe au plus un $\omega\in S$ tel que (5.6) et (5.7) ne soient pas redondantes (n'oublions pas que $\sum_{\omega\in S} \gamma_{ij\omega t} \leq 1$, $\forall (i,j)\in E,\ \forall t\in \mathbf{T}$). Compte tenu de ce fait, quand on aura à travailler sur $(SP.\bar{y})$, on prendra soin de déterminer, pour $(i,j)\in E$, $t\in \mathbf{T}$ donnés, le $\bar{\omega}\in S$, s'il existe, tel que $\bar{\gamma}_{ij\bar{\omega}t} = 1$. Ainsi les contraintes redondantes (5.6) et (5.7) ne devraient pas figurer dans le sous problème.

Proposition 5.1

Soit $\bar{y} \in Y$, alors le sous problème $(SP.\bar{y})$ possède au plus une solution réalisable.

Preuve

Remarquons d'abord, qu'une fois $\bar{y}$ fixé dans Y, la structure du réseau est également fixée de telle sorte qu'à chaque période il est constitué d'un ensemble d'arborescences.
Ainsi, pour tout $(i,j) \in E$, tout $t \in \mathbf{T}$ tels que $\sum_{\omega \in S} \bar{\gamma}_{ij\omega t} = 0$, on a $x_{ijt} = 0$.

Dans le système d'équation (5.8) quand on élimine les variables x_{ijt} qui sont nulles par (5.2), on obtient un système comportant autant de variables que de contraintes. En effet, pour chaque période t, si un sommet j n'est pas une racine (i.e. $\sum_{i \in \Gamma_j^-} \sum_{\omega \in S} \bar{\gamma}_{ij\omega t} = 1$) alors exactement une variable x_{ijt}, $i \in \Gamma_j^-$, peut prendre une valeur différente de 0. De plus, étant donné la structure d'arborescences sous jacente au système d'équation, ce dernier en est un de Cramer. Il possède donc une solution unique $\bar{x}$.

Etant donné $\bar{x}$, les inéquations (5.4) à (5.7) et (5.10) et (5.11) donnent une solution unique $\bar{v}$.

Ainsi si $(SP.\bar{y})$ est réalisable, son domaine se réduit à un seul point $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{v})$. □

5.2 Résolution du sous problème $(SP.\bar{y})$

Dans la preuve de la proposition 5.1, nous avons vue que $(SP.\bar{y})$ a une structure bien spéciale qui rend sa résolution particulièrement simple.

La procédure pour résoudre $(SP.\bar{y})$ s'énonce comme suit:

Procédure 5.2

i) Identifier les variables x_{ijt} forcées à prendre la valeur 0 par les contraintes (5.2).

ii) Eliminer du système (5.8) ces variables x_{ijt} forcées à 0 et évaluer celles qui restent. On obtient alors $\bar{x}$ et on procède à l'étape iii.

iii) Si au moins une des contraintes (5.1) ou (5.2) n'est pas satisfaite, on termine car $(SP.\bar{y})$ n'est pas réalisable.

iv) Résoudre le système d'inéquations (5.4) à (5.7) et (5.10) et (5.11) dans lequel x_{ijt} a été préalablement remplacée par $\bar{x}_{ijt}$. On obtient alors $\bar{v}$.

v) Vérifier si $\bar{v}$ satisfait (5.3).
Si oui, $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{v})$ est la solution optimale réalisable de $(SP.\bar{y})$ et la valeur optimale est $g(\bar{z},\bar{y})$.
Autrement $(SP.\bar{y})$ n'est pas réalisable.

Remarque 5.2

Dans l'étape ii) de la procédure ci-dessus, l'évaluation de $\bar{x}$ se fait de façon triviale. En effet, soit A_i^t une arborescence faisant partie du réseau l'année t et ayant i comme racine. Alors pour tout $j \in A_i^t \cap J$, il existe un $k \in A_i^t$, unique, tel que $\bar{x}_{kjt} > 0$ et $\bar{x}_{kjt}$ est donné par

$$\bar{x}_{kjt} = d_{jt} + \sum_{l \in \Gamma_j^+ \cap A_i^t} \bar{x}_{jlt}$$

5.3 Détermination de la coupe dans le cas où $(SP.\bar{y})$ est réalisable

Dans la suite, nous appelerons ces coupes, les coupes de type I et nous parlerons de coupe de type II pour faire référence aux coupes résultant d'un cas de non réalisabilité de $(SP.\bar{y})$.

Pour construire la coupe de type I, il faut d'abord déterminer les multiplicateurs optimaux associés à la solution optimale réalisable $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{v})$ de $(SP.\bar{y})$ dont on peut affirmer l'existence par le théorème 3.5c.

Soit $(\bar{x},\bar{v})$ la solution optimale de $(SP.\bar{y})$ et désignons par w_{it}, u_{ijt}, r_{jt}, s_{jt}, l_{jt}, k_{ijt}, p_{ijt}, Π_{jt} et ξ_{jt} les multiplicateurs associés respectivement aux contraintes (5.1) à (5.8) et (5.10) et (5.11).

Remarque 5.3

Compte tenu de la remarque 5.1, on suppose que les contraintes redondantes dans (5.6) et (5.7) ont été supprimées. Cela signifie que les multiplicateurs k_{ijt} et p_{ijt} ne sont définis que si $\sum_{\omega \in S} \bar{\gamma}_{ij\omega t} = 1$ et sont associés aux contraintes (5.6) et (5.7) correspondant à l'indice $\bar{\omega}$ tel que $\bar{\gamma}_{ij\bar{\omega}t} = 1$.

De toute façon, étant donné que les contraintes sont satisfaites strictement, même si on les conservait, les multiplicateurs qui leur sont associés seraient nuls. Egalement, étant donné que M prend une valeur suffisamment grande pour que $x_{ijt} < M$ dans toute solution réalisable de $(SP.\bar{y})$, les multiplicateurs associés à ces contraintes sont toujours nuls et peuvent être éliminés dans les relations qui suivent. □

a) Conditions d'optimalité de Kuhn Tucker et complémentarité des variables.

Pour tout $t \in \mathbf{T}$

i) Pour tout $(i,j) \in E$ tel que $i \in I$, $j \in J$

i1) si $\sum_{\omega \in S} \bar{\gamma}_{ij\omega t} = 1$ alors ,

$$W_{it} + U_{ijt} + \Pi_{jt} + \Delta_{\bar{\omega}ij} (k_{ijt} - p_{ijt}) = - \frac{2\sqrt{3}}{V_N} a_i \Delta_{\bar{\omega}ij} \bar{x}_{ijt}$$

où $\bar{\omega}$ est tel que $\bar{\gamma}_{ij\bar{\omega}t} = 1$

i2) si $\sum_{\omega \in S} \bar{\gamma}_{ij\omega t} = 0$ alors,

$$W_{it} + U_{ijt} + \Pi_{jt} \geq 0$$

ii) Pour tout $(i,j)\in E$ tel que $i\in J$, $j\in I$

ii1) si $\sum_{\omega\in S} \overline{\gamma}_{ij\omega t} = 1$ alors,

$$U_{ijt} - \Pi_{it} + \Pi_{jt} + \Delta_{\bar{\omega}ij}\,(k_{ijt} - p_{ijt}) = \frac{-2\sqrt{3}}{V_N}\; a_t\, \Delta_{\bar{\omega}ij}\, \overline{x}_{ijt}.$$

où $\bar{\omega}$ est tel que $\overline{\gamma}_{ij\bar{\omega}t} = 1$

ii) si $\sum_{\omega\in S} \overline{\gamma}_{ij\omega t} = 0$ alors,

$$U_{ijt} - \Pi_{it} + \Pi_{jt} \geq 0$$

iii) Pour tout $j\in J$

iii1) si $\overline{v}_{jt} = 0$ alors,

$$-r_{jt} + s_{jt} - l_{jt} - \sum_{i\in\Gamma_j^+} (k_{jit} - p_{jit}) + \sum_{i\in\Gamma_j^-} (k_{ijt} - p_{ijt}) + \xi_{jt} \geq 0$$

iii2) si $\overline{v}_{jt} > 0$ alors,

$$-r_{jt} + s_{jt} - l_{jt} - \sum_{i\in\Gamma_j^+} (k_{jit} - p_{jit}) + \sum_{i\in\Gamma_j^-} (k_{ijt} - p_{ijt}) + \xi_{jt} = 0$$

iv) Pour tout $i\in I$

$$-\sum_{j\in\Gamma_i^+} (k_{ijt} - p_{ijt}) + \xi_{it} \geq 0$$

b) Conditions de complémentarité entre les multiplicateurs et leurs contraintes associées.

Pour tout $t\in \mathbf{T}$.

Pour tout $i\in I$,

$$w_{it}\,(\sum_{j\in\Gamma_i^+} \overline{x}_{ijt} - \overline{\beta}_{it}) = 0$$

Pour tout $(i,j)\in E$,

$$U_{ijt}\,(\overline{x}_{ijt} - \overline{\chi}_{ijt}) = 0$$

Pour tout $j \in J$,

$$r_{jt} (\overline{\rho}_{jt} V_I - V_{jt}) = 0$$

$$s_{jt} (V_{jt} - \overline{\rho}_{jt} V_N) = 0$$

$$l_{jt} (\overline{\theta}_{jt} V_N - V_{jt}) = 0$$

$$\xi_{jt} (V_{jt} - V_N) = 0$$

Pour tout $(i,j) \in E$ tel que $\sum_{\omega \in S} \overline{\gamma}_{ij\omega t} = 1$,

$$k_{ijt} [v_{jt} - v_{it} + \Delta_{\overline{\omega}ij} \overline{x}_{ijt} - M' \overline{\theta}_{jt}] = 0$$

$$p_{ijt} [-v_{jt} + v_{it} - \Delta_{\overline{\omega}ij} \overline{x}_{ijt} - M' \overline{\theta}_{jt}] = 0$$

où $\overline{\omega}$ est tel que $\sum_{\omega \in S} \overline{\gamma}_{ij\overline{\omega}t} = 1$.

c) Conditions sur le signe des multiplicateurs.

Pour tout $t \in \mathbf{T}$, tout $(i,j) \in E$

$$U_{ijt} \geq 0 \; ; \; k_{jt} \geq 0 \; ; \; p_{ijt} \geq 0 \; .$$

Pour tout $t \in \mathbf{T}$, tout $j \in J$

$$r_{jt} \geq 0 \; ; \; s_{jt} \geq 0 \; ; \; l_{jt} \geq 0 \; ; \; \xi_{jt} \geq 0 \; .$$

Pour tout $t \in \mathbf{T}$, tout $i \in I$

$$W_{it} \geq 0 \; .$$

Remarque 5.4

En examinant de près les conditions (b), on constate que si $\overline{\theta}_{jt} = 1$ alors $r_{jt} = 0$ et $k_{ijt} = p_{ijt} = 0$ pour tout $i \in \Gamma_j^-$.

L'autre part, on peut réduire le nombre de variables en posant

$q_{ijt} = k_{ijt} - p_{ijt}$

et alors,

si $q_{ijt} > 0$ on prendra $k_{ijt} = q_{ijt}$ et $p_{ijt} = 0$

si $q_{ijt} < 0$ on prendra $p_{ijt} = -q_{ijt}$ et $k_{ijt} = 0$

si $q_{ijt} = 0$ on prendra $p_{ijt} = k_{ijt} = 0$

Organigramme pour déterminer les relations reliées aux arcs

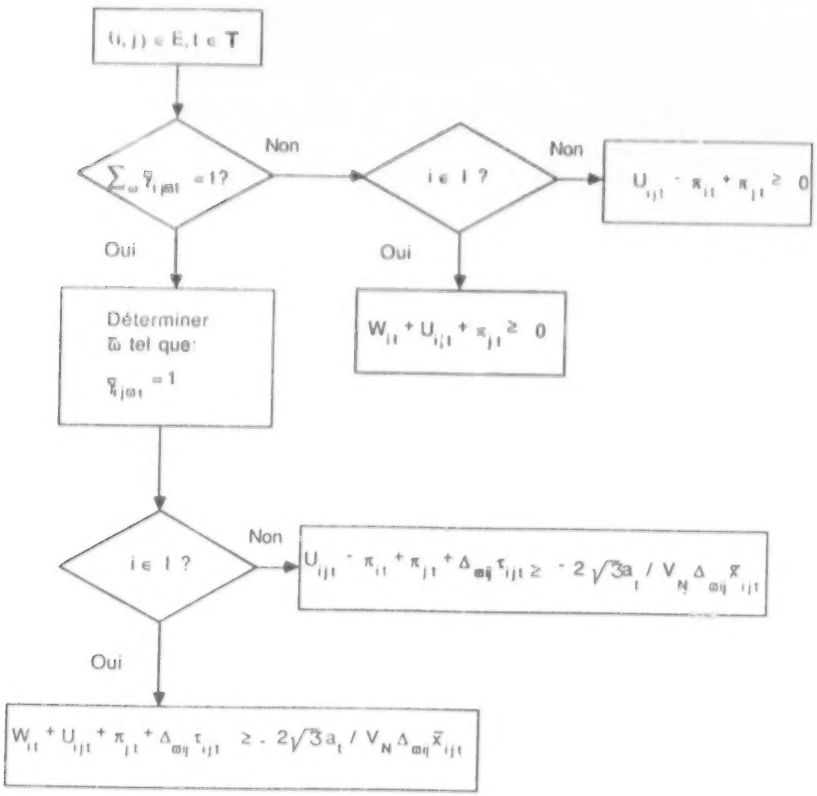


Figure 5.1: Organigramme pour déterminer les relations reliées aux arcs

Référons-nous maintenant à l'organigramme de la figure 5.1 illustrant les relations associées aux arcs. Puisque dans le cas où $\sum_{\omega \in S} \bar{\gamma}_{ij\omega t} = 0$ alors $\bar{x}_{ijt} = 0$, il s'en suit que les relations se réduisent à

$$w_{it} + U_{ijt} + \Pi_{jt} \geq -2\sqrt{3}\,\frac{a_t}{V_N}\,(\sum_{\omega \in S} \Delta_{\omega ij}\,\bar{\gamma}_{ij\omega t})\,\bar{x}_{ijt}$$

$$U_{ijt} - \Pi_{it} + \Pi_{jt} \geq -2\sqrt{3}\,\frac{a_t}{V_N}\,(\sum_{\omega \in S} \Delta_{\omega ij}\,\bar{\gamma}_{ij\omega t})\,\bar{x}_{ijt}.$$

Ainsi, étant donné que la solution $\bar{x}$ est unique et facilement identifiable, une façon simple de déterminer les multiplicateurs est de résoudre le problème de programmation linéaire

$$Min \sum_{t=1}^{T} \sum_{(i,j) \in E} \sum_{\omega \in S} 2\sqrt{3}\,\frac{a_t}{V_N}\,\Delta_{\omega ij}\,\bar{\gamma}_{ij\omega t}\,\bar{x}_{ijt}\,x_{ijt}$$

sujet aux contraintes (5.1) à (5.11).

En effet, les deux problèmes ont les mêmes multiplicateurs optimaux comme le démontre l'argument précédent.

Evaluation de la coupe de type I

Rappelons que la coupe de type I est de la forme:

$$\inf_{z \in Z} \{g(z,y) + u^T \tilde{G}(z,y)\} \leq y_0$$

L'évaluation de cette coupe nécessite la résolution d'un problème de minimisation sur Z. Cela peut demander beaucoup de temps d'autant plus que g(z,y) n'est pas linéaire. Notre objectif étant de trouver une solution ε-optimale, il nous parait plus raisonnable d'utiliser la coupe heuristique suivante:

$g(\bar{z},y) + u^T \tilde{G}(\bar{z},y) \leq y_0$

où $\bar{z}$ est la solution optimale du problème $(SP.\bar{y})$.

L'utilisation de cette coupe heuristique aura l'avantage de diminuer le temps de calcul mais pourrait avoir l'inconvénient d'entraîner une augmentation de la valeur optimale du problème maître relaxé. Et comme cette valeur optimale constitue une borne inférieure pour la valeur optimale du problème original, on risquerait, en utilisant la coupe heuristique, d'obtenir des bornes inférieures excédant les bornes inférieures théoriques, comme indiqué à la figure 5.2

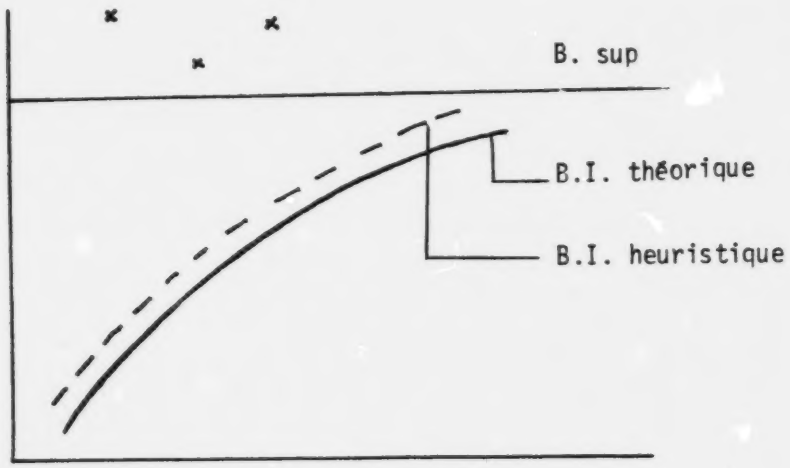


Figure 5.2: Bornes inférieures heuristiques et théoriques

5.4 Détermination de la coupe dans le cas où $(SP.\bar{y})$ est non réalisable

Compte tenu de la structure du probème et du fait que les tensions aux points de charge dépendent, non seulement, du flot de puissance dans les lignes, mais également du type de conducteur utilisé, nous allons distinguer deux types de non-réalisabilité de $(SP.\bar{y})$.

Le premier type, que nous appelerons non-réalisabilité essentielle, se présentera quand un poste doit fournir une puissance dépassant sa capacité ou quand une ligne doit supporter une intensité dépassant la limite admissible pour cette ligne (i.e. la procédure 5.2 s'arrête en iii).

On sera en présence du second type, qu'on appelera non-réalisabilité secondaire quand les capacités sur les postes et les lignes sont respectées mais les tensions en certains points de charge sont violées (i.e. la procédure 5.2 s'arrête en v).

Il est clair que si l'on a une non-réalisabilité essentielle, il ne sert à rien de s'occuper des tensions puisque la structure du réseau doit être modifiée et que toute modification aura une influence sur l'évaluation des tensions.

5.4.1 Détermination des multiplicateurs dans le cas de non-réalisabilité essentielle

Soit $\bar{x}$ le vecteur déterminé à l'étape ii) de la procédure 5.2.

Le vecteur $\bar{x}$ se décompose de la façon suivante: $\bar{x} = (\bar{x}_B : \bar{x}_R)$ où $\bar{x}_R = 0$ est donné par (5.2) et $\bar{x}_B$ solution unique de (5.8) quand $\bar{x}_R = 0$.
Soit $E'_B = \{(i,j) \in E \,/\, \bar{\chi}_{ijt} > 0\}$

Supposons que certaines contraintes (5.1) et/ou (5.2) ne sont pas satisfaites par $\bar{x}$ et posons:

$$e'_{it} = \sum_{j \in \Gamma_i^+} \bar{x}_{ijt} - \bar{\beta}_{it} \; ; \; i \in I, \; t \in \mathbf{T}$$

$$e_{ijt} = \bar{x}_{ijt} - \bar{\chi}_{ijt} \; ; \; (i,j) \in E, \; t \in \mathbf{T} \; .$$

$$a'_{it} = \begin{cases} 0 \;\; si \;\; e'_{it} \leq 0 \\ \\ \dfrac{1}{e'_{it}} \;\; si \;\; e'_{it} > 0 \end{cases} \quad ; \quad i \in I, \; t \in \mathbf{T} \; .$$

$$a_{ijt} = \begin{cases} 0 \;\; si \;\; e_{ijt} \leq 0 \\ \\ \dfrac{1}{e_{ijt}} \;\; si \;\; e_{ijt} > 0 \end{cases} \quad ; \quad (i,j) \in E_B^t,\ t \in \mathbf{T}\ .$$

$$r = \sum_{t=0}^{T} \left(\sum_{i \in I} a'_{it} + \sum_{(i,j) \in E_B^t} a_{ijt} \right)$$

$$\lambda'_{it} = a'_{it} \qquad i \in I,\ t \in \mathbf{T}$$

$$\lambda_{ijt} = \begin{cases} a_{ijt} \;\; si \;\; (i,j) \in E_B^t \\ \\ r \;\;\;\; si \;\; (i,j) \in E - E_B^t \end{cases} \quad , (i,j) \in E,\ t \in \mathbf{T}\ .$$

Considérons enfin, le problème (5.4.1) suivant:

$$Min\ Z_0 = \sum_{t=1}^{T} \left[\sum_{i \in I} \lambda'_{it} \left[\sum_{j \in \Gamma_i^+} x_{ijt} - \overline{\beta}_{it} \right] + \sum_{(i,j) \in E} \lambda_{ijt} \left(x_{ijt} - \overline{\chi}_{ijt} \right) \right]$$

sujet à

$$\sum_{i \in \Gamma_j^-} x_{ijt} - \sum_{i \in \Gamma_j^+} x_{jit} = d_{jt} \ ; \ j \in J,\ t \in \mathbf{T} \qquad (5.4.1)$$

$$x_{ijt} \geq 0\ .$$

on a alors le théorème suivant:

Théorème 5.4.1

a. $\overline{x}$ est une solution réalisable optimale pour le problème (5.4.1).

b. La valeur optimale Z_0^* du problème (5.4.1) est telle que $Z_0^* > 0$.

Preuve

a. Par construction, $\bar{x}$ est une solution de base réalisable du problème (5.4.1). Il reste à montrer qu'elle est optimale.
Soit alors $\Pi_t^T = [\Pi_{1t}, \ldots, \Pi_{mt}]$ le vecteur des multiplicateurs associé à la solution de base $\bar{x}$.

Nous allons distinguer deux cas, suivant que $\bar{x}$ est dégénérée ou pas.

a.1 Supposons que $\bar{x}$ est non dégénérée.
Alors, pour tout $t \in$ **TfP** et tout $j \in J$, il existe un $i \in I \cup J$, unique tel que $\bar{x}_{ijt} > 0$
or
$\bar{x}_{ijt} > 0 \Longrightarrow \bar{c}_{ijt} = 0$ où $\bar{c}_{ijt}$ est le coût relatif associé à la variable x_{ijt}.

Mais
$\bar{c}_{ijt}$ est donné par les relations:

$$\bar{c}_{ijt} = c_{ijt} - \Pi_{jt} \quad si \quad i \in I$$

$$et\ \bar{c}_{ijt} = c_{ijt} + \Pi_{it} - \Pi_{jt} \quad si \quad i \in J$$

où c_{ijt} est le coût original de la variable x_{ijt}.

Ainsi, en écrivant que le coût relatif des variables de base est nul, nous obtenons un système de $T.(I \cup J)$ équations linéaires indépendantes à $T.(I \cup J)$ inconnues (les Π_{jt}). Les Π_{jt} sont donc déterminés de façon unique.

Pour montrer que $\bar{x}$ est optimale, il suffit de vérifier que le coût relatif de toute variable hors base est non-négatif. Pour ce faire, remarquons que

a.1.1) $\forall j \in J$, $\forall t \in \mathbf{T}$ alors $\Pi_{jt} \geq 0$

En effet,
soit $t \in \mathbf{T}$ et soit $i \in I$ tel qu'il existe $j \in J$ et $(i,j) \in E'_B$ (i.e. x_{ijt} variable de base).
Alors,

$\overline{c}_{ijt} = c_{ijt} - \Pi_{jt} = 0$
D'où
$\Pi_{jt} = c_{ijt} \geq 0$ par définition de c_{ijt}.

S'il n'existe pas de noeud $k \in J$ tel que $(j,k) \in E'_B$ alors j est un noeud pendant et le multiplicateur qui lui est associé est Π_{jt}.

S'il existe un noeud $k \in J$ tel que $(j,k) \in E'_B$ alors,

$0 = \overline{c}_{jkt} = c_{jkt} + \Pi_{jt} - \Pi_{kt}$
D'où
$\Pi_{kt} = \Pi_{jt} + c_{jkt} \geq 0$ car $\Pi_{jt} \geq 0$ *et* $c_{jkt} \geq 0$.

En répétant, pour k, le même raisonnement qu'on avait fait pour j, on trouve que les multiplicateurs associés aux noeuds de l'arborescence de racine i sont tous non négatifs.

Ceci étant vrai pour toute racine i, on a donc $\Pi_t \geq 0$ $\forall t \in \mathbf{T}$.

a.1.2) $\forall j \in J$, $\forall t \in \mathbf{T}$ alors $\Pi_{jt} \leq r$.

En effet:
Pour tout $t \in \mathbf{T}$ et tout $j \in J$, il existe $i \in I$ tel que j appartient à l'arborescence de racine i.
Soit alors $i = k_0, k_1, \ldots, k_p = j$ le chemin de i à j (à la période t).

On a alors,

$\Pi_{jt} = \sum_{l=0}^{p-1} C_{k_l k_{l+1} l} \leq r$ par construction.

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que $\overline{c}_{ijt} \geq 0$ pour tout $(i,j) \in E$, tout $t \in T$ tels que x_{ijt} est variable hors base.

En effet,
soit x_{ijt} une variable hors base

i) si $i \in I$ alors,
$\overline{c}_{ijt} = c_{ijt} - \Pi_{jt}$
mais
$c_{ijt} \geq r$ par définition
et $\Pi_{ji} \leq r$ par a.1.2)
donc $\overline{c}_{ijt} \geq 0$

ii) si $i \in J$ alors,
$\overline{c}_{ijt} = c_{ijt} + \Pi_i - \Pi_{jt} \geq c_{ijt} - \Pi_{jt} \geq 0.$

Car $\Pi_{it} \geq 0$, $c_{ijt} = r$ et $\Pi_{jt} \leq r$.
Donc si $\overline{x}$ n'est pas dégénérée alors elle est optimale.

a.2 Supposons que $\overline{x}$ est dégénérée.

Il existe alors $t \in T$ tel qu'il existe $j \in J$ et j isolé à la période t

i.e. $\exists\, t \in T$ / $\forall i \in I \cup J$, $(i,j) \in E$ on a $\overline{x}_{ijt} = 0$.

On dira qu'un noeud j isolé possède la propriété (P) si j peut être connecté à un point de charge non isolé ou à un poste donné.

Notons qu'il existe toujours au moins un j isolé possédant la propriété (P). Car sinon $G(I \cup J, E)$ ne serait pas connexe.

Soit donc j un noeud isolé possédant la propriété (P). Il s'agit de déterminer le multiplicateur associé à j. On procède de la façon suivante:

- On détermine les multiplicateurs associés à tous les noeuds non isolés en procédant comme dans a.1). Ces multiplicateurs vont toujours vérifier:
  $0 \leq \Pi_{it} \leq r$, $\forall t \in T$, $\forall i \in I \cup J$, i non isolé.

- On définit $\Lambda_j = \{k \in J: (k,j) \in E$ et Π_{kt} a été déterminé$\}$
  * si $\Lambda_j = \phi$ alors il existe $i \in I$ tel que $(i,j) \in E$.
  Dans ce cas on considère $x_{ijt} = 0$ comme variable de base et on en déduit que $\Pi_{jt} = c_{ijt}$
  * si $\Lambda_j \neq \phi$ alors il existe $\bar{k} \in J$ tel que $\Pi_{\bar{k}t} = \min_{k \in \Lambda_j} \Pi_{kt}$.

    . si $\forall i \in I$, $(i,j) \notin E$ alors on considère $x_{\bar{k}jt} = 0$ comme variable de base et on en déduit $\Pi_{jt} = c_{\bar{k}jt} + \Pi_{\bar{k}t}$ ou encore $\Pi_{jt} = r + \Pi_{\bar{k}t}$

    . si $\exists i \in I$ tel que $(i,j) \in E$ alors on prendra $\Pi_{jt} = \min\{r + \Pi_{\bar{k}t}, c_{ijt}\}$ et la variable nulle qui sera considéré comme variable de base sera $x_{\bar{k}jt}$ si $r + \Pi_{\bar{k}t} \leq c_{ijt}$ et x_{ijt} dans le cas contraire.

Une fois Π_{jt} déterminé, on considère j comme non isolé et on refait la même procédure pour tous les j qui sont encore isolés. Ainsi, on peut déterminer les multiplicateurs de tous les noeuds initialement isolés.

Vérifions maintenant que les coûts relatifs des variables hors base sont tous non-négatifs.
En fait, il suffit de vérifier que $\bar{c}_{ijt} \geq 0$ pour tout $(i,j) \in E$ tel que i ou j est isolé.
Soit donc $j \in J$ isolé à la période t et soit i tel que $(i,j) \in E$.

Cas 1: $i \in I$, alors

$$\bar{c}_{ijt} = c_{ijt} - \Pi_{jt} \geq 0 \text{ car } \Pi_{jt} \leq c_{ijt} \text{ par définition}$$

Cas 2: $i \in J$ et i non isolé, alors

$$. \ \bar{c}_{ijt} = c_{ijt} + \Pi_{it} - \Pi_{jt} = r + \Pi_{it} - \Pi_{jt} \geq 0 \text{ car}$$

par définition $\Pi_{jt} \leq r + \Pi_{\bar{i}t} \leq r + \Pi_{it}$.

$$. \ \bar{c}_{jit} = c_{jit} + \Pi_{jt} - \Pi_{it} \geq 0 \text{ car } \Pi_{it} \leq \Pi_{jt} \text{ et } c_{jit} \geq 0.$$

Cas 3: $i \in J$ et i isolé, alors

$$. \ \bar{c}_{ijt} = c_{ijt} + \Pi_{it} - \Pi_{jt}$$

et

$$\bar{c}_{jit} = c_{jit} + \Pi_{jt} - \Pi_{it}$$

or

$|\Pi_{it} - \Pi_{jt}| \leq r \quad \forall i,j$ isolés tel que $(i,j) \in E$

Donc

$\bar{c}_{ijt} \geq 0$ et $\bar{c}_{jit} \geq 0$.

ce qui clos la preuve du a).

b. Montrons que $Z_o^* > 0$

D'après a) on a

$$Z_0^* = \sum_{t=1}^{T} \left[\sum_{i \in I} \lambda'_{it} \left[\sum_{j \in \Gamma_i^+} \bar{x}_{ijt} - \bar{\beta}_{it} \right] + \sum_{(i,j) \in E} \lambda_{ijt} (\bar{x}_{ijt} - \bar{\chi}_{ijt}) \right]$$

or

$$\sum_{i \in I} \lambda'_{it} \left[\sum_{j \in \Gamma_i^+} \bar{x}_{ijt} - \bar{\beta}_{it} \right] = \sum_{i \in I_1'} \frac{1}{e'_{it}} e'_{it} = |I_1'| .$$

où

$$I_1' = \{ i \in I : e'_{it} > 0 \}$$

et

$$\sum_{(i,j)\in E} \lambda_{ijt}\,(\overline{x}_{ijt} - \overline{\chi}_{ijt}) = \sum_{(i,j)\in E'_B} a_{ijt}\,(\overline{x}_{ijt} - \overline{\chi}_{ijt}) + \sum_{E-E'_B} r(\overline{x}_{ijt} - \overline{\chi}_{ijt})$$

or

$$\sum_{E-E'_B} r(\overline{x}_{ijt} - \overline{\chi}_{ijt}) = 0$$

D'où

$$\sum_{(i,j)\in E} \lambda_{ijt}\,(\overline{x}_{ijt} - \overline{\chi}_{ijt}) = \sum_{(i,j)\in E'_B} \frac{1}{e_{ijt}}\, e_{ijt} = |\overline{E}'_B|$$

où

$$\overline{E}'_B = \{(i,j)\in E'_B : a_{ijt} > 0\}$$

D'où

$$Z_0^* = \sum_{t=1}^{T} (|I'_1| + |\overline{E}'_B|) > 0 \qquad \square$$

5.4.2 Détermination des multiplicateurs dans le cas de non-réalisabilité secondaire

Le sous problème ($SP.\overline{y}$) a la forme suivante:

$$\begin{aligned} &\min\ g(z,\overline{y}) \\ &\textit{sujet à} \\ &Az + Ir = b \\ &Dz + Iu = d \\ &z \geq 0,\ r \geq 0,\ u \geq 0 \end{aligned} \qquad (5.4)$$

où r est le vecteur des variables d'écart dans les contraintes (5.1) à (5.7) et u le vecteur des variables d'écart dans (5.9) et (5.10).

Théorème 5.4.2

Si le problème (5.4) est non réalisable et si $\bar{\lambda}$ désigne le vecteur de multiplicateurs optimaux associé aux contraintes $Az + Ir = b$ de la phase I appliquée au problème (5.4) dans lequel $g(z,\bar{y})$ est remplacée par n'importe quelle fonction linéaire alors:

$$\bar{\lambda} \leq 0 \quad et \quad \min_{z \in Z} (-\lambda)^T (Az - b) > 0$$

où

$$Z = \{z \geq 0 : \exists\, u \geq 0 \; et \; Dz + Iu = d\}$$

Preuve

Le problème de la phase I associé à (5.4) s'écrit:

$$\begin{aligned} & Min\ 1^T t + 1^T s \\ & sujet\ à \\ & Az + Ir + It \quad = b \\ & Dz \quad + Iu + Is = d \\ & z \geq 0,\ r \geq 0,\ u \geq 0, \\ & s \geq 0,\ t \geq 0 \end{aligned} \tag{5.4P}$$

Le dual de (5.4P) s'écrit:

$$\begin{aligned} & Max\ \lambda^T b + \mu^T d \\ & sujet\ à \\ & A^T\lambda + D^T\mu \leq 0 \\ & \lambda \leq 0 \\ & \mu \leq 0 \\ & \lambda \leq 1 \\ & \mu \leq 1 \end{aligned} \tag{5.4D}$$

Soit $(\bar{z}, \bar{r}, \bar{u}, \bar{t}, \bar{s})$ et $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ les solutions optimales respectives de (5.4.P) et (5.4.D).

$\bar{\lambda}$ est réalisable pour (5.4.D) donc $\bar{\lambda} \leq 0$, d'autre part, par le théorème de dualité forte on a,

$$1^T\bar{t} + 1^T\bar{s} = \bar{\lambda}^T b + \Pi^T d$$

et comme par hypothèse (5.4) est non réalisable alors

$$\bar{\lambda}^T b + \Pi^T d > 0 \qquad (1)$$

D'autre part, $(\bar{\lambda},\Pi)$ est réalisable pour (5.4.D) donc

$$A^T\bar{\lambda} + D^T\Pi \leq 0$$

D'où

$$\forall z \geq 0,\ z^T A^T\bar{\lambda} + z^T D^T\Pi \leq 0$$

En particulier,
pour $z \geq 0$ tel que $Dz + Iu = d$, $u \geq 0$, on a

$$\bar{\lambda}^T Az + \Pi^T d - \Pi^T u \leq 0$$

Et comme

$$\Pi^T u \leq 0$$

et

$$\Pi^T d > -\bar{\lambda}^T b$$

Alors,

$$\bar{\lambda}^T Az - \bar{\lambda}^T b < 0 \quad \forall z \geq 0 \textit{ tel que } Dz + Iu = d,\ u \geq 0$$

Donc

$$\min_{z \in Z} (-\bar{\lambda})^T (Az - b) > 0$$

□

Ainsi, par le théorème 5.4.2, pour obtenir les multiplicateurs λ, il suffit d appliquer une phase I au problème $(SP.\bar{y})$ dans lequel la fonction économique a été remplacée par n'importe quelle fonction linéaire.

Remarque 5.4.2

La dernière technique pour déterminer les multiplicateurs λ s'applique pour les deux types de non réalisabilité mais, il est clair que dans le cas de non réalisabilité essentielle, il est beaucoup plus simple et plus rapide de déterminer les multiplicateurs par la méthode exposée dans la section 5.4.1 plutôt que d'utiliser une phase I.

5.4.3 Evaluation de la coupe de type II

Soit $\bar{\lambda}$ le vecteur des multiplicateurs déterminé par l'une ou l'autre des méthodes exposées aux sections 5.4.1 et 5.4.2.

La coupe de type II étant de la forme

$$L_*(y, \bar{\lambda}) = \inf_{z \in Z} \bar{\lambda}^T \tilde{G}(z,y)$$

et $\tilde{G}(z,y)$ s'écrivant $\tilde{G}_1(z) + \tilde{G}_2(y)$, on en déduit que

$$L_*(y, \bar{\lambda}) = \bar{\lambda}^T \tilde{G}_2(y) + \inf_{z \in Z} \bar{\lambda}^T \tilde{G}_1(z) .$$

Supposons que $\bar{\lambda}$ a été déterminé par la méthode de la section 5.4.1 et soit $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{v})$ défini de la façon suivante:

$\bar{x} = \bar{X}$

$\bar{v}_{it} = v_N \quad \forall i \in I, \forall t \in T$

$\bar{v}_{jt} = 0 \qquad \forall j \in I, \forall t \in T$

Alors, par le théorème 5.4.1, $\bar{z}$ est solution optimale du problème

$$\min \{\bar{\lambda}^T \tilde{G}_1(z): z \in Z\} .$$

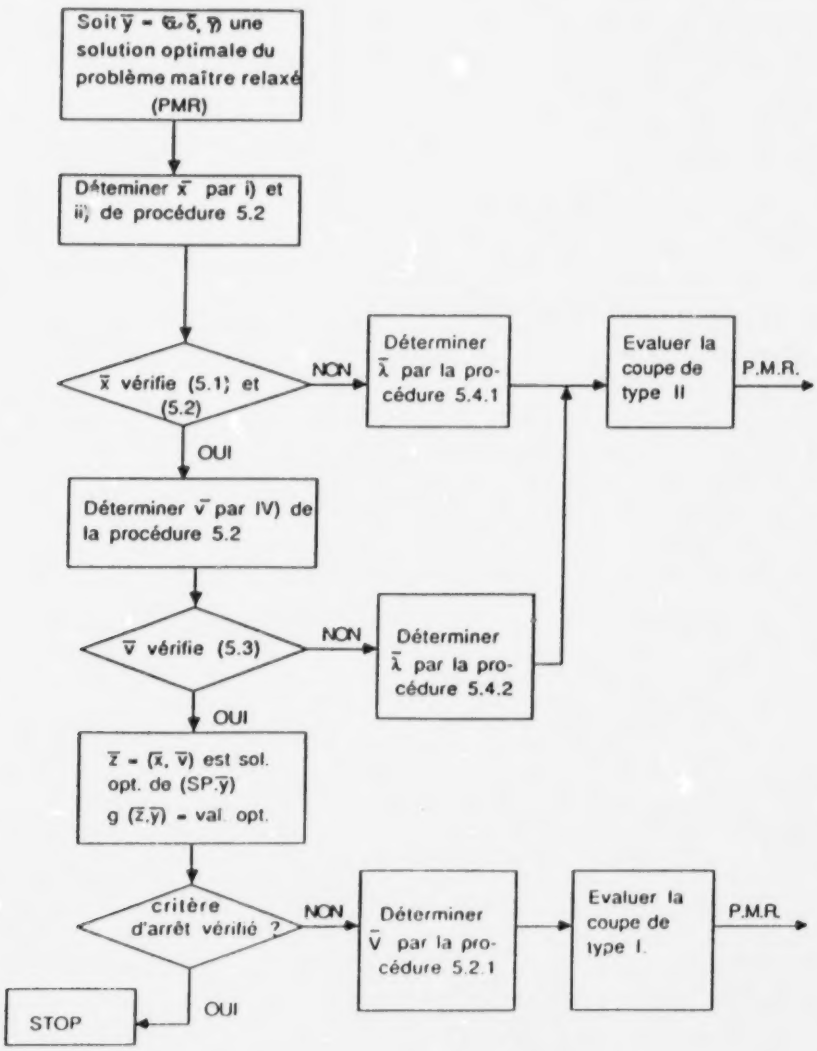
et dans ce cas on a:

$$L_* (y, \bar{\lambda}) = \bar{\lambda}^T \tilde{G}_2(y) + \bar{\lambda}^T \tilde{G}_1(\bar{z}) .$$

Si maintenant $\bar{\lambda}$ a été déterminé par la méthode de la section 5.4.2 alors le problème min $\{\bar{\lambda}^T \bar{G}_1(z): z \in Z\}$ peut être résolu par n'importe quel algorithme de programmation linéaire.

5.5 Organigramme général pour l'exploitation du sous-problème

Ayant étudié, dans les sections précédentes, tous les aspects se rapportant au sous-problème, nous donnons, ci-dessous, un résumé de la façon d'exploiter ce dernier.



CHAPITRE VI

TRANSFORMATION ET RESOLUTION DU PROBLEME MAITRE

Si le sous-problème joue un rôle essentiel pour orienter le problème-maître dans sa recherche d'une solution optimale réalisable, c'est tout de même ce dernier qui joue le rôle de chef d'orchestre dans la méthode globale de résolution. C'est là qu'apparaît l'importance pour le problème maître d'avoir une forme permettant de lui trouver une solution optimale par la méthode la plus simple possible.

Il est intéressant de rappeler que c'est le problème maître qui détermine la structure du réseau. Ce dernier comprend les contraintes concernant l'évolution et la dimension des postes ainsi que les règles régissant la circulation du flot de puissance dans le réseau de lignes.

Au cours de la résolution, des coupes, simulant l'effet de la composante gestion qui est traitée dans le sous-problème, viendront s'ajouter aux contraintes originales. Le problème maître tel qu'explicité à la fin du Chapitre III s'écrit

$$\begin{aligned} & \textit{Min } f(y) + y_0 \\ \textit{sujet à} \\ & \inf_{z \in Z} \{g(z,y) + u^T \tilde{G}(z,y)\} \le y_0 \quad \forall u \ge 0 . \\ & \inf_{z \in Z} \{\lambda^T \tilde{G}(z,y)\} \le 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda \\ & y \in Y \end{aligned}$$

Comme cela a été précisé dans le chapitre précédent, la coupe de type I sera remplacée par la coupe heuristique

$$g(\bar{z},y) + u^T \tilde{G}(\bar{z},y) \le y_0,$$

Où $\bar{z}$ est la solution optimale du sous-problème $(SP.\bar{y})$.

Quant à la coupe de type II, elle est équivalente à la coupe

$$\lambda^T \tilde{G}_2(y) + \inf_{z \in Z} \lambda^T \tilde{G}_1(z) \le 0$$

Si l'on pose

$$L_1(y,u) = g(\bar{z},y) + u^T \tilde{G}(\bar{z},y)$$

et

$$L_2(y,\lambda) = \lambda^T \tilde{G}_2(y) + \inf_{z \in Z} \lambda^T \tilde{G}_1(z) ,$$

Le problème maître relaxé aura la forme suivante

$$\begin{aligned} & \textit{Min } f(y) + y_0 \\ \textit{sujet à} \\ & L_1(y,u^j) \le y_0 \qquad j=0,\ldots, p . \qquad (6.1) \\ & L_2(y,\lambda^j) \le 0 \qquad j=0,\ldots, q \\ & y \in Y \end{aligned}$$

Dans ce problème, toutes les contraintes sont linéaires (par rapport à y), malheureusement cela n'est pas le cas pour la fonction objectif et ce fait rend sa résolution pour le moins très difficile.

Dans la section qui suit, nous allons contourner cette difficulté en construisant un problème équivalent au problème (6.1) mais qui est cette fois complètement linéaire.

6.1 Transformation du problème maître

On a,

$$f(y) = f_1(\alpha) + f_2(\delta) + f_3(\gamma) \text{ où}$$

$$f_3(\gamma) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{(i,j)\in F} \sum_{\omega\in S} K'_{\omega t}\, l_{ij}\, \gamma_{ij\omega t}\, (1-\gamma_{ij\omega t-1})\, (1-\gamma_{ji\omega t-1})$$

$$+ \sum_{t=1}^{T} \sum_{(i,j)\in \bar{F}} \sum_{\omega\in S} K'_{\omega t}\, l_{ij}\, \gamma_{ij\omega t}\, (1-\gamma_{ij\omega t-1})$$

$$+ \sum_{t=1}^{T} \sum_{(i,j)\in E} \sum_{\omega\in S} E'_{ijt}\, l_{ij}\, \gamma_{ij\omega t}\,.$$

Ou encore

$$f_3(\gamma) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{(i,j)\in F} \sum_{\omega\in S} [K'_{\omega t}(1-\gamma_{ij\omega t-1} - \gamma_{ji\omega t-1}) + E'_{ijt}]\, l_{ij}\, \gamma_{ij\omega t}$$

$$+ \sum_{t=1}^{T} \sum_{(i,j)\in \bar{F}} \sum_{\omega\in S} [K'_{\omega t}(1-\gamma_{ij\omega t-1}) + E'_{ijt}]\, l_{ij}\, \gamma_{ij\omega t}\,.$$

En développant les expressions à l'intérieur des crochets, on obtient

$$f_3(\gamma) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{(i,j)\in E} \sum_{\omega\in S} (K'_{\omega t} + E'_{ijt})\, l_{ij}\, \gamma_{ij\omega t}$$

$$- \sum_{t=1}^{T} \sum_{(i,j)\in F} \sum_{\omega\in s} K'_{\omega t}\, l_{ij}\, (\gamma_{ij\omega t-1} + \gamma_{ji\omega t-1})\, \gamma_{ij\omega t}$$

$$- \sum_{t=1}^{T} \sum_{(i,j)\in \bar{F}} \sum_{\omega\in S} K'_{\omega t}\, l_{ij}\, \gamma_{ij\omega t-1}\, \gamma_{ij\omega t}\,.$$

Posons,

$$f'_3(\gamma) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{(i,j)\in E} \sum_{\omega\in S} (K'_{\omega t} + E'_{ijt})\, l_{ij}\, \gamma_{ij\omega t}$$

et considérons les problèmes (6.1.1) et (6.1.2) suivants:

$$Min\ Z_1 = y_0 + f_1(\alpha) + f_2(\delta) + f'_3(\gamma) - \sum_{t=1}^{T} \sum_{(i,j)\in F} \sum_{\omega\in S} K'_{\omega t}\, l_{ij}\, (\gamma_{ij\omega t-1} + \gamma_{ji\omega t-1})\, \gamma_{ij\omega t}$$

$$- \sum_{t=1}^{t} \sum_{(i,j)\in F} \sum_{\omega\in S} K'_{\omega t}\, l_{ij}\, \gamma_{ij\omega t-1}\, \gamma_{ij\omega t}$$

sujet à :

$$\begin{aligned} & L_1(\alpha,\delta,\gamma;\, u^j) \le y_0 \qquad j=1,\ldots,\, p \\ & L_2(\alpha,\delta,\gamma;\, \lambda^j) \le 0 \qquad j=1,\ldots,\, q \\ & g_1(\alpha) \le 0 \\ & g_2(\delta) \le 0 \\ & \gamma\in \Gamma \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

$$Min\ Z_2 = y_0 + f_1(\alpha) + f_2(\delta) + f'_3(\gamma) - \sum_{t=1}^{T} \sum_{(i,j)\in E} \sum_{\omega\in S} K'_{\omega t}\, l_{ij}\, \lambda_{ij\omega t}$$

sujet à

$$\begin{aligned} & L_1(\alpha,\delta,\gamma;\, u^j) \le y_0 \qquad j=1,\ldots,\, p \\ & L_2(\alpha,\delta,\gamma;\, \lambda^j) \le 0 \qquad j=1,\ldots,\, q \\ & g_1(\alpha) \le 0 \\ & g_2(\delta) \le 0 \\ & \gamma\in \Gamma \\ & \lambda_{ij\omega t} \le \gamma_{ij\omega t} \qquad (i,j)\in E\ ,\ \omega\in S\ ,\ t\in T^* \\ & \lambda_{ij\omega t} \le \gamma_{ij\omega t-1} + \gamma_{ji\omega t-1} \qquad (i,j)\in F\ ,\ \omega\in S\ ,\ t\in T^* \\ & \lambda_{ij\omega t} \le \gamma_{ij\omega t-1} \qquad (i,j)\in \bar{F}\ ,\ \omega\in S\ ,\ t\in T^* \\ & \lambda_{ij\omega t} = 0 \text{ ou } 1 \qquad (i,j)\in E\ ,\ \omega\in S\ ,\ t\in T^* \end{aligned} \tag{6.12}$$

où

$g_1(\alpha) \le 0$ représente les contraintes (3.11), (3.12) et (3.13) n'impliquant que les variables α.

$g_2(\delta) \le 0$ représente les contraintes (3.18) n'impliquant que les variables δ

$\hat{\Gamma}$ = { γ : les contraintes (3.14) à (3.17) et (3.21) et (3.22) sont satisfaites }

et $T^* = T - \{0\}$.

Proposition 6.1.1

Soient $\bar{Z}_1$ et $\bar{Z}_2$ les valeurs optimales de (6.1.1) et (6.1.2) respectivement alors on a: $\bar{Z}_1 \geq \bar{Z}_2$

Preuve

Soient $w_1 = (\alpha,\delta,\gamma,y_0)$ une solution réalisable du problème (6.1.1) alors en posant

$$\lambda_{ijot} = \gamma_{ijot}\,(\gamma_{ijot-1} + \gamma_{jiot-1}) \quad si\ (i,j)\in F$$

$$et \quad \lambda_{ijot} = \gamma_{ijot}\,\gamma_{ijot-1} \quad si\ (i,j)\in \bar{F}\ ,$$

on a

$w_2 = (\alpha,\delta,\gamma,\lambda,y_0)$ est une solution réalisable du problème (6.1.2) et $Z_1(w_1) = Z_2(w_2)$.

En effet,

$$\lambda_{ijot} = 0\ ou\ 1 \quad \forall (i,j)\in E,\ \forall t\in T$$

D'autre part,

pour $(i,j)\in F$,

$\lambda_{ijot} = \gamma_{ijot}\,(\gamma_{ijot-1} + \gamma_{jiot-1}) \Longrightarrow (\lambda_{ijot} \leq \gamma_{ijot}\ et\ \lambda_{ijot} \leq \gamma_{ijot-1} + \gamma_{jiot-1})$

car

$$\gamma_{ijcst} = 0 \text{ ou } 1 \quad et \quad \gamma_{ijcst-1} + \gamma_{jicst-1} = 0 \text{ ou } 1 .$$

pour $(i,j) \in \bar{F}$,

$$\lambda_{ijcst} = \gamma_{ijcst} + \gamma_{ijcst-1} \Longrightarrow \lambda_{ijcst} \leq \gamma_{ijcst} \text{ et } \lambda_{ijcst} \leq \gamma_{ijcst-1} .$$

Les autres contraintes étant identiques pour les deux problèmes, on a donc w_2 est une solution réalisable du problème (6.1.2).

D'autre part,

$$Z_1(w_1) = y_0 + f_1(\alpha) + f_2(\delta) + f'_3(\gamma) - \sum_{t=1}^{T} \sum_{(i,j)\in F} \sum_{c\in S} K'_{cst}\, l_{ij}\, \gamma_{ijcst} (\gamma_{ijcst-1} + \gamma_{jicst-1})$$

$$- \sum_{t=1}^{T} \sum_{(i,j)\in \bar{F}} \sum_{c\in S} K'_{cst}\, l_{ij}\, \gamma_{ijcst}\, \gamma_{ijcst-1} .$$

$$= y_0 + f_1(\alpha) + f_2(\delta) + f'_3(\gamma) - \sum_{t=1}^{T} \sum_{(i,j)\in E} \sum_{c\in S} K'_{cst}\, l_{ij}\, \lambda_{ijcst}$$

$$= Z_2(w_2)$$

Donc

$$Z_1(w_1) = Z_2(w_2)$$

soit alors $\bar{w}_1 = (\bar{\alpha},\bar{\delta},\bar{\gamma},\bar{y}_0)$ une solution réalisable optimale du problème (6.1.1)

Alors,

$$\bar{Z}_1 = Z_1(\bar{w}_1) = Z_2(\bar{w}_2) \geq \bar{Z}_2$$

□

Proposition 6.1.2

Soit $\overline{w}_2 = (\overline{\alpha},\overline{\delta},\overline{\gamma},\overline{\lambda},\overline{y}_0)$ une solution réalisable optimale du problème (6.1.2)

Alors $\forall \omega \in S$, $\forall t \in T^*$,

$$\overline{\lambda}_{ijcst} = \overline{\gamma}_{ijcst}\,(\overline{\gamma}_{ijcst-1} + \overline{\gamma}_{jicst-1}) \quad pour \quad (i,j)\in F$$

$$et \quad \overline{\lambda}_{ijcst} = \overline{\gamma}_{ijcst}\,\overline{\gamma}_{ijcst-1} \quad pour \quad (i,j)\in \overline{F}$$

Preuve

Il suffit de montrer que $\forall \omega \in S \quad \forall t \in T^*$, $\forall (i,j)\in E$

$$\overline{\lambda}_{ijcst} = 1 \leftrightarrow \overline{\gamma}_{ijcst} = 1 \; et \begin{cases} \overline{\gamma}_{ijcst-1} + \overline{\gamma}_{jicst-1} = 1 & si\ (i,j)\in F \\ \overline{\gamma}_{ijcst-1} = 1 & si\ (i,j)\in \overline{F} \end{cases}$$

i) soit $(i,j)\in E$ et supposons que $\overline{\lambda}_{ijcst} = 1$ alors,

$\overline{w}_2$ est une solution réalisable du problème (6.1.2) implique que:

$$1 = \overline{\lambda}_{ijcst} \le \overline{\gamma}_{ijcst}$$

or

$$\overline{\gamma}_{ijcst} \le 1 \qquad d'où \qquad \overline{\gamma}_{ijcst} = 1$$

d'autre part, si $(i,j)\in F$ alors,

$$1 = \overline{\lambda}_{ijcst} \le \overline{\gamma}_{ijcst-1} + \overline{\gamma}_{jicst-1}$$

or

$$\overline{\gamma}_{ijcst-1} + \overline{\gamma}_{jicst-1} \le 1$$

d'où

$$\overline{\gamma}_{ij\omega t-1} + \overline{\gamma}_{ji\omega t-1} = 1$$

et enfin si $(i,j)\in \overline{F}$ alors,

$$1 = \overline{\lambda}_{ij\omega t} \leq \overline{\gamma}_{ij\omega t-1} \quad d'où \quad \overline{\gamma}_{ij\omega t-1} = 1 .$$

Donc

$$\overline{\lambda}_{ij\omega t} = 1 \Longrightarrow \overline{\gamma}_{ij\omega t} = 1 \; et \begin{cases} \overline{\gamma}_{ij\omega t-1} + \overline{\gamma}_{ji\omega t-1} = 1 & si\ (i,j)\in F \\ \overline{\gamma}_{ij\omega t-1} = 1 & si\ (i,j)\in \overline{F} \end{cases}.$$

ii) Supposons par contradiction qu'il existe un $(p,q)\in F$ tel que

$$\overline{\gamma}_{pq\omega t} = 1 \; , \; \overline{\gamma}_{pq\omega t-1} + \overline{\gamma}_{qp\omega t-1} = 1 \quad et \quad \overline{\lambda}_{pq\omega t} = 0$$

ou qu'il existe un $(p,q)\in \overline{F}$ tel que

$$\overline{\gamma}_{pq\omega t} = 1 \; , \; \overline{\gamma}_{pq\omega t-1} = 1 \; et \; \overline{\lambda}_{pq\omega t} = 0$$

Puisque $K'_{\omega t}\, l_{ij} > 0$, pour tout $(i,j)\in E$, tout $\omega\in S$ et tout $t\in \mathbf{T}$ alors la solution réalisable $w_2 = (\overline{\alpha},\overline{\delta},\gamma,\lambda,\overline{y}_0)$ où $\gamma = \overline{\gamma}$ et $\lambda_{ij\omega t} = \overline{\lambda}_{ij\omega t}$ pour $(i,j) \neq (p,q)$ et $\lambda_{pq\omega t} = 1$ est telle que

$Z_2(w_2) < Z_2(\overline{w}_2)$ ce qui contredit le fait que $\overline{w}_2$ est optimale.

□

Théorème 6.1.1

Soit $\overline{w}_2 = (\overline{\alpha},\overline{\delta},\overline{\gamma},\overline{\lambda},\overline{y}_0)$ une solution réalisable optimale du problème (6.1.2). Alors, $\overline{w}_1 = (\overline{\alpha},\overline{\delta},\overline{\gamma},\overline{y}_0)$ est une solution réalisable optimale du problème (6.1.1) et on a

$$\overline{Z}_1 = \overline{Z}_2 .$$

Preuve

On a $\overline{w}_2$ solution réalisable de (6.12) ==> $\overline{w}_1$ solution réalisable de (6.1.1).

D'autre part, par la proposition 6.1.2 on a

$$\overline{w}_2 \text{ optimale pour (6.12)} \Longrightarrow \begin{cases} \overline{\lambda}_{ijcst} = \overline{\gamma}_{ijcst}\,(\overline{\gamma}_{ijcst-1} + \overline{\gamma}_{jicst-1}) & si\ \ (i,j)\in F \\ et & \\ \overline{\lambda}_{ijcst} = \overline{\gamma}_{ijcst}\,\overline{\gamma}_{ijcst-1} & si\ \ (i,j)\in \overline{F} \end{cases}$$

et par conséquent

$$\overline{Z}_2 = Z_2(\overline{w}_2) = Z_1(\overline{w}_1) \geq \overline{Z}_1$$

Mais, d'après la proposition 6.1.1, on a $\overline{Z}_1 \geq \overline{Z}_2$

Donc

$$\overline{Z}_2 = Z_1(\overline{w}_1) = \overline{Z}_1$$

□

Remarque 6.1.1

Le théorème 6.1.1 nous dit que la résolution du problème (6.1.2) nous donne directement la solution du problème (6.1.1).

6.2 Méthode de résolution du problème maître

Le problème (6.1.2) construit à la section précédente est un problème de programmation linéaire mixte pour la résolution duquel plusieurs logiciels sont disponibles. Pour notre part, et du fait que nous avons développé notre programme sur la machine SUN, nous avons utilisé le logiciel ZOOM/XMP dont une brève description sera donnée à la section 6.2.2.

Mais auparavant nous allons dire quelques mots sur la façon de traiter les contraintes d'élimination des circuits.

6.2.1 Elimination des circuits

Les contraintes d'élimination des circuits étant en très grand nombre, il est alors hors de question de les considérer toutes en même temps dans le problème. Ces dernières seront relaxées et introduites au fur et à mesure lorsque la solution comporte au moins un circuit.

Cela suppose la mise en place d'un test, sous forme de procédure, pour détecter dans chaque solution, les éventuels circuits.

Ainsi, pour chaque circuit $j_1, \ldots, j_p$ détecté, on introduira le couple de contraintes suivant:

$$\sum_{\omega \in S} (\gamma_{j_1 j_2 \omega} + \gamma_{j_2 j_3 \omega} + \ldots + \gamma_{j_{p-1} j_p \omega} + \gamma_{j_p j_1 \omega}) \leq p-1$$

et

$$\sum_{\omega \in S} (\gamma_{j_2 j_1 \omega} + \gamma_{j_3 j_2 \omega} + \cdots + \gamma_{j_p j_{p-1} \omega} + \gamma_{j_1 j_p \omega}) \leq p-1 \ .$$

L'inconvénient majeur de cette approche vient du fait qu'il faut peut-être résoudre plusieurs fois le problème maître relaxé avant d'identifier une solution sans circuit.
Des variantes de cette méthode seront proposées et testées dans le chapitre VII consacré aux résultats numériques.

6.2.2 Le logiciel ZOOM/XMP (Marsten 1981)

ZOOM/XMP est un logiciel conçu pour résoudre les problèmes de programmation linéaire mixte où les variables entières ne prennent que les valeurs 0 ou 1.

Il s'adresse particulièrement aux problèmes de taille moyenne (environ 200 variables binaires) qui n'ont pas de structure particulière.

Le programme s'articule autour de trois axes principaux.

1- Résolution du programme linéaire relaxé.

2- Utilisation d'une méthode heuristique pour chercher une solution entière au voisinage de la solution optimale du problème linéaire relaxé.

3- Séparation et évaluation.

ZOOM commence par résoudre le programme (PLR) où les contraintes d'intégrité sont relaxées.

Trois situations peuvent alors se présenter:

i) PLR est non réalisable. Dans ce cas, il en est de même pour le problème original et la procédure s'arrête.

ii) La solution optimale de PLR est entière. Dans ce cas, cette solution est optimale pour le problème original et la procédure s'arrête.

iii) PLR est réalisable mais sa solution optimale n'est pas entière. Dans ce cas, la valeur optimale de PLR est une borne inférieure (pour un problème de minimisation) sur la valeur optimale du problème original et on passe à la deuxième phase.

La deuxième phase consiste à utiliser une méthode heuristique, développée par Balas et Martin (1980), pour chercher une solution entière réalisable au voisinage de la solution optimale de PLR.

Cette recherche s'effectue en rendant, hors base, certaines variables entières de base et en complémentant certaines autres variables entières qui sont hors base (en les faisant passer de 0 à 1 et vice versa). Si une solution entière réalisable est trouvée, des complémentations additionnelles seront essayées dans l'espoir d'améliorer la solution courante.

Si l'écart entre la valeur optimale de PLR et la valeur correspondant à la solution entière trouvée par l'heuristique est inférieure à un certain niveau de tolérance, que l'utilisateur s'est fixé au départ, alors la solution heuristique est suffisamment bonne et la procédure s'arrête.

Dans le cas contraire, on passe à la troisième phase.

Celle-ci est une application de la méthode de "Branch and Bound" avec certaines innovations par rapport à la méthode classique. Notamment en ce qui concerne l'ordre dans lequel les variables vont être fixées à une valeur donnée (voir Marsten et Morin (1978)) et le choix et le nombre de noeuds à partir desquels le branchement est effectué (voir Marsten et Singhal (1981)).

Les variables entières sont partitionnées en trois groupes, les variables de base VB, les variables hors base qui sont à leur borne supérieure BS et les variables hors base qui sont à leur borne inférieure BI.

Dans chacun des groupes, les variables sont triées selon leur valeur pour le groupe VB et selon leur coût relatif pour les groupes BS et BI.

Trois options sont alors possibles pour l'ordre dans lequel la séparation peut être effectuée.

a) On sépare d'abord relativement aux variables VB dans l'ordre dans lequel elles ont été triées, ensuite on sépare relativement aux variables BS et enfin relativement aux variables BI.

b) Les variables BS sont placés avant les variables VB.

c) L'ordre de branchement est laissé à la discrétion de l'utilisateur.

Dans la méthode classique du "Branch and Bound", le branchement est effectué à partir d'un noeud donné permettant la création de deux autres noeuds.

ZOOM utilise une stratégie plus générale qui consiste à choisir plusieurs noeuds (disons k noeuds) se trouvant au même niveau (d) de l'arborescence, puis à les

séparer plusieurs fois (disons s fois) pour créer $k.2^s$ nouveaux noeuds au niveau d + s de l'arborescence.

A chacun des $k.2^s$ noeuds, créés au niveau d + s, est associé un problème linéaire permettant de calculer une borne pour le noeud correspondant.

Mais, compte tenu de l'ordre dans lequel la séparation est effectuée, les $k.2^s$ problèmes ne différent que par leurs termes de droite. Et ainsi, il suffit de résoudre un premier problème puis d'utiliser la programmation paramétrique pour obtenir la solution des $k.2^s$-1 autres problèmes.

Des tests effectués par Singhal (1982) ont montré que la meilleure stratégie consistait à prendre k = 5 et s = 4, donnant 80 noeuds pour chaque exploration.

6.3 Algorithme général pour la résolution du modèle de la planification

Tout d'abord, rappelons quelques éléments du problème.

Notre modèle original s'écrit:

$$\begin{aligned} & Min\ f(y) + g(z,y) \\ & sujet\ à \\ & \tilde{G}(z,y) \leq 0 \\ & z \in Z\ ,\ y \in Y \end{aligned}$$

Le problème maître relaxé correspondant est

$$\begin{aligned} & Min\ f(y) + y_0 \\ & sujet\ à \\ & \inf_{z \in Z} \{g(z,y) + (u^j)^T \tilde{G}(z,y)\} \leq y_0 \qquad j=1,\ldots, p \\ & \inf_{z \in Z} \{(\lambda^j)^T \tilde{G}(z,y)\} \leq 0 \qquad j=1,\ldots, q \\ & y \in Y \end{aligned}$$

et le sous-problème $(SP.\bar{y})$ est de la forme

$$\begin{aligned} & Min\ g(z,\bar{y}) \\ & sujet\ à \\ & \tilde{G}(z,\bar{y}) \leq 0 \\ & z \in Z \end{aligned}$$

En posant

$$\bar{v}(y) = \inf_{z \in Z} \{g(z,y) : \tilde{G}(z,y) \leq 0\}$$

L'algorithme général s'énonce comme suit:

Etape 1:

Soit $\bar{y}$ la solution initiale réalisable déterminée au chapitre IV.

Résoudre le sous-problème $(SP.\bar{y})$ et déterminer un vecteur de multiplicateurs optimaux $\bar{u}$ ainsi que la fonction $L_1(y,\bar{u}) = g(\bar{z},y) + \bar{u}^T \tilde{G}(\bar{z},y)$ où $\bar{z}$ est la solution optimale de $(SP.\bar{y})$.

Poser p=1, q=0, $\hat{u}=\bar{u}$, BS = $f(\bar{y}) + \bar{v}(\bar{y})$ et choisir un niveau de tolérance $\varepsilon > 0$

Etape 2:

Résoudre le problème maître relaxé

$$\begin{aligned} & Min\ f(y) + y_0 \\ & sujet\ à \\ & L_1(y,u^j) \leq y_0 \qquad j=1,\ldots,p \\ & L_2(y,\lambda^j) \leq 0 \qquad j=1,\ldots,q \\ & y \in Y \end{aligned}$$

où

$$L_2(y;\lambda) = \inf_{z \in Z} \{\lambda^T \tilde{G}(z,y)\} .$$

Soit $(\hat{y}, \hat{y}_0)$ une solution optimale.

Si BS - $\epsilon \leq f(\hat{y}) + \hat{y}_0$, terminer.

Etape 3:

Résoudre le sous-problème $(SP.\hat{y})$. Une des situations suivantes doit se présenter:

i) $\tilde{v}(\hat{y})$ est fini

si $\tilde{v}(\hat{y}) \leq \hat{y}_0 + \epsilon$, terminer

Autrement, déterminer un vecteur de multiplicateurs optimaux $\hat{u}$ ainsi que la fonction $L_1(y; \hat{u})$.

Augmenter p de 1 et poser $\hat{u} = u^p$.

Si $f(\hat{y}) + \tilde{v}(\hat{y}) <$ BS alors poser BS = $f(\hat{y}) + \tilde{v}(\hat{y})$ et revenir à l'étape 2.

ii) Le problème $(SP.\hat{y})$ est non réalisable.
Déterminer alors $\hat{\lambda} \in \Lambda$ tel que $\inf_{z \in Z} \{\hat{\lambda}^T \tilde{G}(z,y)\} > 0$. Expliciter $L_2(y,\hat{\lambda})$; augmenter q de 1, poser $\lambda^q = \hat{\lambda}$ et revenir à l'étape 2.

Remarque 6.1

Dans l'étape 3i), la procédure s'arrête si $\tilde{v}(\hat{y}) \leq \hat{y}_0 + \epsilon$.
Cela signifie que $\hat{y}$ et ϵ-optimale pour le problème projeté $\min_{y \in Y \cap V} f(y) + \tilde{v}(y)$. Ainsi toute solution optimale $\hat{z}$ de $(SP.\hat{y})$ fournit une solution $(\hat{z}, \hat{y})$ ϵ-optimale pour le problème original et la valeur de cette solution est $f(\hat{y}) + g(\hat{z}, \hat{y})$.
Dans l'étape 2, la procédure s'arrête si $BS - \epsilon \leq f(\hat{y}) + \hat{y}_0$.

Comme BS est la meilleure borne supérieure qui a été trouvée (soit à l'étape 1, soit à l'étape 3i), la solution ε-optimale $\bar{y}$ qui sera retenue pour le problème projeté sera celle qui a fourni BS i.e. $\bar{y}$ telle que BS = $f(\bar{y}) + \tilde{v}(\bar{y})$.

CHAPITRE VII

EXPERIMENTATION

L'objectif que nous visons dans ce chapitre, est de tester la validité de la méthode que nous avons construite.

Le travail nécessité par l'implantation s'étant avéré beaucoup plus important qu'on ne pouvait le penser au départ, nous nous sommes contentés de mettre au point un programme expérimental qui, s'il est loin d'être optimal, nous permet néanmoins, de constater que la méthode fonctionne bien.

Le programme principal est écrit en Pascal et fait appel au logiciel ZOOM/XMP (Marsten 1981) pour résoudre le problème maître. Les tests ont été effectués sur un ordinateur SUN 3 du laboratoire d'optimisation, au département d'informatique et de recherche opérationnelle de l'Université de Montréal.

Avant de décrire les résultats que nous avons obtenus nous allons exposer, brièvement, la stratégie utilisée pour la résolution du problème maître.

7.1 Stratégie pour accélérer la recherche d'une solution du problème maître

La stratégie que nous proposons permet d'accélérer la recherche arborescente lorsque le "Branch and Bound" (B & B) est utilisé. La solution obtenue peut être sous-optimale mais reste, dans tous les cas, proche de la solution optimale.

Rappelons que l'algorithme commence par résoudre le problème (PLR) où les contraintes d'intégrité sont rélaxées. Si la solution obtenue est entière alors elle est optimale pour le problème maître.

Si la solution du problème (PLR) n'est pas entière, une méthode heuristique est alors utilisée pour chercher une solution entière réalisable au voisinage de la solution optimale de PLR. Si Z_h désigne la valeur de la solution heuristique et que l'écart entre Z_h et la valeur de (PLR) n'est pas suffisamment petit on utilise le "B & B" pour améliorer Z_h.

La stratégie que nous proposons consiste à introduire une valeur fictive Z_f qui représentera un "bluf" sur la meilleure solution entière trouvée jusqu'à maintenant.

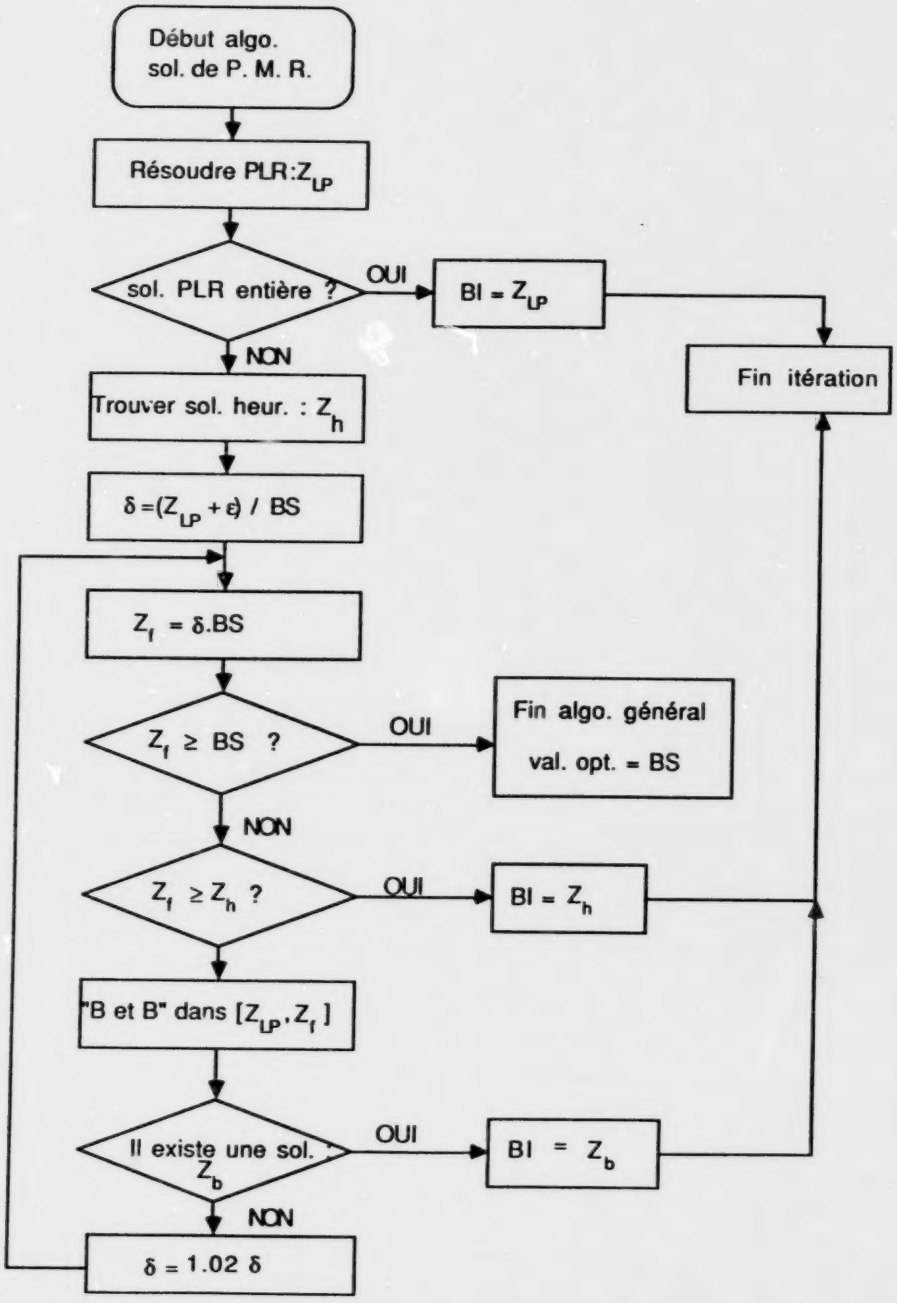
Si $Z_h \leq Z_f$, alors on se contentera de la solution heuristique et on ne fera pas appel au "B & B" . Autrement, on fait partir le "B & B" avec Z_f comme borne supérieure. La recherche dans l'arbre se fait alors assez rapidement. A la fin de la procédure deux cas peuvent se présenter :

i- Aucune solution, meilleure que celle correspondant à Z_f, n'a été trouvée. Dans ce cas, on augmente la valeur de Z_f et on reprend la recherche.

ii- Une meilleure solution a été trouvée et alors on arrête.
La détermination de Z_f se fait de la façon suivante:
Etant donné que la valeur optimale Z^*, se trouve entre Z_{LP}, la valeur de (PLR) et BS, la meilleure borne supérieure trouvée jusqu'à présent, on fixera Z_f entre Z_{LP} et BS en posant $Z_f = \delta . BS$ où $\delta = \dfrac{Z_{LP} + \varepsilon}{BS}$, ε pouvant être fixée à une valeur donnée suivant la nature du problème (on pourra par exemple prendre $\varepsilon = 1\%\ Z_{LP}$)

On cherchera alors une solution entière dans l'intervalle $[Z_{LP}, Z_f]$. Si la recherche échoue, on augmentera δ de 2% et l'on recommence avec la nouvelle valeur de Z_f.

L'algorithme de résolution du problème maître se présente schématiquement comme suit:



7.2 Recherche d'une solution sans circuit

Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre précédent, les contraintes d'élimination de circuits sont relaxées. Par conséquent, la solution obtenue après la résolution du problème maître peut contenir un ou plusieurs circuits. Quand cette situation se présente nous introduisons alors les contraintes

$$\sum_{\omega \in S} (\gamma_{j_1 j_2 \omega t} + \gamma_{j_2 j_3 \omega t} + \cdots + \gamma_{j_{p-1} j_p \omega t} + \gamma_{j_p j_1 \omega t}) \leq p-1$$

et (7.2.1)

$$\sum_{\omega \in S} (\gamma_{j_2 j_1 \omega t} + \gamma_{j_3 j_2 \omega t} + \cdots + \gamma_{j_p j_{p-1} \omega t} + \gamma_{j_1 j_p \omega t}) \leq p-1$$

où

$j_1, \ldots, j_p$ est un circuit, et nous résolvons de nouveau le problème maître.

Nous avons essayé une alternative à cette méthode, en remplaçant les contraintes (7.2) par la contrainte

$$\sum_{j \in Q} \sum_{\substack{i \in \Gamma_j \\ i \notin Q}} \sum_{\omega \in S} \gamma_{ij\omega t} \geq 1 \qquad (7.2.2)$$

où Q est le circuit détecté.

La contrainte (7.2.2) signifie qu'au moins un point de charge appartenant au circuit, doit être alimenté par une source (point de charge ou poste) n'appartenant pas au circuit.

Les tests effectués avec les deux méthodes montrent la supériorité de la deuxième.

7.3 Intervention de l'usager

Rappelons que lorsque le problème maître fournit une solution $(\hat{y}, \hat{y}_0)$, cette dernière est testée par le sous-problème $(SP.\hat{y})$. Si $(SP.\hat{y})$ est non réalisable et la non-réalisabilité est secondaire (i.e ne concerne que les tensions), on pourrait alors envisager la possibilité pour l'usager d'intervenir pour aller installer des régulateurs de façon à rendre le problème réalisable.

Dans notre programme, nous avons incorporé une procédure qui indique les points de charge où la tension n'est pas dans les normes (ceci, bien sûr, en cas de non réalisabilité secondaire).

Les tests que nous avons effectués, ont montré, qu'une intervention judicieuse de l'usager permet d'améliorer la borne supérieure et éventuellement de trouver directement la solution optimale.

7.4 L'expérimentation

Rappelons que le but visé par l'expérimentation est plus de tester la validité de l'approche plutôt que son efficacité. Le problème maître est résolu par ZOOM/XMP qui n'exploite aucunement la structure spéciale du problème. Il est certain qu'une étude approfondie de cette question, ce qui est loin d'être simple, pourrait permettre de résoudre plus efficacement le problème maître et ainsi améliorer l'efficacité globale de l'approche. Compte tenu de la remarque ci-dessus, nous nous limiterons dans cette section à l'étude de deux exemples. Les données que nous avons considérées ont été construites, en partie, à la suite de discussions que nous avons eu avec des personnes travaillant dans le domaine de la distribution de l'énergie électrique.

Exemple 1

Considérons un réseau constitué de deux postes A et B, huit points de charge 1,2,...8 et 28 arcs admissibles. Supposons que l'on dispose de deux types de conducteurs, ω_1 et ω_2, deux types de transformateurs c_1 et c_2 et un horizon de trois périodes t=0, 1, 2.

La longueur des arcs admissibles ainsi que les coûts des équipements, exprimés en milliers de dollars, sont donnés dans l'annexe B.

Nous avons effectué trois tests avec cet exemple. Dans un premier temps, nous avons résolu le problème avec une "bonne" solution initiale qui a été générée par la méthode exposée au chapitre IV. En second lieu, nous avons considéré une solution initiale quelconque. Et finalement, nous avons modifié quelque peu le tableau des distances de façon que l'emploi des régulateurs de tension devienne nécessaire. Cette

modification aura pour effet d'augmenter le coût des connexions, ce qui explique la différence entre les valeurs du tableau 7.3 et celles des tableaux 7.1 et 7.2.

Il est clair que le choix du niveau de tolérance dépend étroitement de l'ordre de grandeur des coûts impliqués. Pour cette raison, nous avons considéré des différences relatives entre BS et BI.

Ainsi avec un pourcentage d'écart de 3% entre la borne supérieure et la borne inférieure, nous obtenons les résultats suivants:

i. En partant avec une bonne solution initiale, l'algorithme nous donne une solution après cinq itérations avec une borne supérieure égale à 6,413,000 dollars et une borne inférieure de 6,289,000 dollars, soit une différence absolue de 124,000 dollars. Cela peut paraître considérable mais il reste toujours à l'agent de décision la possibilité d'ajuster le niveau de tolérance à sa convenance. Le temps CPU (y compris la lecture et l'écriture) pour ce cas est de 178 secondes.
Les résultats pour ce premier cas sont résumés dans le tableau 7.1.

itération	type de coupe	δ	Z_f	BI	BS
0	-	-	-	-	6588
1	1	-	-	6065	-
2	2	0.94	6193	6155	-
3	2	0.96	6325	6221	-
4	2	0.96	6325	6222	-
5	2	0.96	6325	6289	6413
arrêt de l'algorithme car $(\text{BS} - \text{BI})/BI = 0.019 < \epsilon$					

Tableau 7.1: Résultats avec solution initiale 1

Signalons enfin que nous avons résolu le même exemple avec un pourcentage d'écart entre les bornes égal à 0.05%, l'algorithme a fini après six itérations avec la même solution que précédemment.

ii. Avec une solution initiale quelconque les résultats sont sensiblement les mêmes, néanmoins une légère différence au niveau des temps CPU avantage l'utilisation d'une bonne solution réalisable comme solution de départ puisque, pour ce cas le temps CPU est de 197 secondes.
Les résultats pour ce cas sont résumés dans le tableau 7.2

itération	type de coupe	δ	Z_f	BI	BS
0	-	-	-	-	7296
1	1	-	-	6038	-
2	2	0.84	6129	6128	-
3	2	0.86	6275	6199	-
4	2	0.86	6275	6199	-
5	2	0.86	6275	6269	6413
arrêt de l'algorithme car $(\text{BS} - \text{BI})/BI = 0.023 < \epsilon$					

Tableau 7.2: Résultats avec solution initiale 2

Dans le troisième cas, et toujours avec un pourcentage d'écart égal à 3%, l'algorithme a fini après 19 itérations avec un temps de 572 secondes. Il est à noter qu'il commence par régler d'abord les problèmes de flot (non réalisabilité essentielle); ce qu'il fait en 14 itérations pour ensuite s'attaquer au problème de tension.

En utilisant l'option où l'usager peut intervenir, nous avons pu obtenir la même solution dès la quinzième itération. Cela peut paraître biaisé puisque l'intervention a été faite à posteriori mais en fait, la procédure qui indique les points de charge où les tensions sont violées, fournit également les successeurs de ces points de charge dans la solution courante.

Avec ces informations, l'usager commencera par régler le problème des points de charge les moins éloignés du poste source. Cela aura pour conséquence d'augmenter la tension au point de charge suivants et éventuellement faire disparaître la non réalisabilité en ces points. Dans tous les cas, il peut tester très rapidement l'effet des changements qu'il a apportés et ainsi rectifier sa stratégie si nécessaire.

Le tableau 7.3 donne les résultats pour ce troisième cas. Dans la deuxième colonne du tableau, la mention "2-t" indique que la non réalisabilité est dûe uniquement aux tensions.

itération	type de coupe	δ	Z_f	BI	BS
0	-	-	-	-	72115
1	1	-	-	59454	-
2	2	0.84	60577	59909	-
3	2	0.84	60577	59902	-
4	2	0.84	60577	60357	-
5	2	0.84	60577	60237	-
6	2	0.86	62019	61061	-
7	2	0.86	62019	61061	-
8	2	0.86	62019	61110	-
9	2	0.86	62019	61142	-
10	2	0.86	62019	61222	-
11	2	0.86	62019	61222	-
12	2	0.86	62019	61141	-
13	2	0.86	62019	61222	-
14	2	0.86	62019	61764	-
15	2-t	0.86	62019	61845	-
16	2-t	0.86	62019	61845	-
17	2-t	0.86	62019	61925	-
18	2-t	0.86	62019	61925	-
19	2-t	0.86	62019	61926	63367
arrêt de l'algorithme car $(\text{BS} - \text{BI})/BI = 0.023 < \epsilon$					

Tableau 7.3: Résultats avec régulateurs

Signalons enfin, que pour cet exemple nous avons testé les deux méthodes d'élimination de circuits. Pour les trois cas, l'alternative que nous avons proposée s'est avérée beaucoup plus efficace que la méthode originale.

Exemple 2

Comme deuxième exemple, nous avons considéré un réseau relativement plus important que le premier et le but recherché n'était pas de trouver la solution optimale mais d'évaluer la qualité de la solution initiale.

Pour cela, nous avons résolu le problème maître de façon sous-optimale. On s'est contenté à chaque itération de la solution Z_h trouvée par la méthode heuristique. Le résultat est assez intéressant puisqu'au bout de 23 itérations, la borne supérieure est passé de 19,755,000 à 18,617,000 dollars soit une amélioration de près de 6%. Ce résultat est intéressant dans la mesure où la méthode de Benders nous a permis d'évaluer la qualité de la solution de départ qui a été construite par une méthode heuristique.

Les résultats pour cet exemple sont résumés dans le tableau 7.4 alors que les données se trouvent dans l'annexe B.

itération	type de coupe	Z_h	BS
0	-	-	19755
1	1	16823	
2	2	17654	
3	2	17773	
4	2	17690	
5	2	18065	
6	2	18401	
7	2	18293	
8	2	18403	
9	2	18291	
10	2	18640	
11	2	18324	
12	2	18446	
13	2	18405	
14	2	18651	
15	2	18949	
16	2	18200	
17	2	18417	
18	2	18321	
19	2	18568	
20	2	18790	
21	2	18288	
22	2	19617	
23	2	18194	18617

Tableau 7.4: Résultats avec heuristique

Remarque

1- Dans les tests que nous avons effectués, les bornes inférieures considérés sont surestimées ce qui implique une sous-estimation du niveau de tolérance. Etant conscients de ce fait, nous avons développé certaines idées pour se rapprocher de la borne théorique mais, dans le contexte de ces tests préliminaires, nous avons décidé de ne pas pousser l'étude plus loin.

2- Les temps de calcul que nous avons mentionnés auparavant n'ont pas beaucoup de signification du fait que notre code est expérimental et qu'aucune optimisation n'a été faite dans ce sens.

7.5 Conclusion

Les exemples que nous avons traités semblent confirmer la validité de l'approche que nous avons développée. Mais, nous sommes conscients qu'il reste beaucoup à faire au niveau de l'implantation et de l'exploitation de la structure du problème maître pour la rendre applicable à des réseaux de grande taille. Cependant comme nous l'avons mentionné plus haut la méthode de Benders reste un outil précieux pour évaluer la qualité de toute solution heuristique.

CONCLUSION

Ce travail représente une contribution importante dans la recherche d'une méthode satisfaisante pour la résolution du problème de la planification de la distribution de l'énergie électrique. Nous avons formulé un modèle rigoureux et précis, en y incorporant les différents éléments qui interviennent dans un réseau de distribution d'énergie électrique et en tenant compte des interactions entre ces éléments. Grâce à des développements mathématiques importants, nous avons réussi à transformer notre modèle original, qui est un modèle non linéaire, en un problème complètement linéaire équivalent au problème original. Comme approche de résolution nous avons considéré la méthode de décomposition de Benders généralisée. Les développements théoriques nécessaires à l'application de la méthode ont été effectués. Nous avons ensuite développé une approche constructive pour la formation d'une solution de départ réalisable. Au cours du processus de construction de cette solution, nous avons été confrontés à un problème de flot à coût minimum avec des contraintes de radialité (problème d'alimentation des points de charge). Pour le résoudre, nous avons proposé une méthode heuristique et une méthode exacte. Dans une troisième étape, nous avons déterminé les principaux éléments qui interviennent dans l'approche de résolution (solution du sous-problème et du problème maître, génération et évaluation des coupes).

Finalement, des tests numériques nous ont permis de vérifier la validité du modèle et de l'approche utilisée pour le résoudre.

Cependant, beaucoup de travail reste à faire avant d'arriver à mettre au point un logiciel général pour la planification de la distribution de l'énergie électrique.

Nous entrevoyons deux voies dans lesquelles une recherche approfondie pourrait contribuer à la réalisation de ce logiciel.

La première serait une approche constructive, allant dans le même sens que celle que nous avons développée pour la construction d'une solution initiale.

Quant à la deuxième elle consisterait à exploiter la structure particulière du problème maître de façon à le résoudre efficacement. Signalons que le problème maître peut être vu comme un problème de design de réseau et que la recherche dans ce domaine est encore à ses débuts.

Même si beaucoup de travail reste à faire, nous avons montré cependant que, d'une part, il est possible de construire un modèle mathématique qui intégre les principaux aspects de la planification de la distribution d'énergie électrique et d'autre part, que la décomposition de Benders généralisée est une approche qui peut s'avérer intéressante pour la résolution de ce modèle.

ANNEXE A

ANNEXE A

Une méthode de résolution du problème d'alimentation des points de charge

Dans cette annexe, nous donnons, dans une première partie, une application numérique de l'algorithme heuristique, SOLREA, exposé dans le chapitre IV. Dans une deuxième partie, nous exposons un algorithme exact pour la résolution du même problème.

Rappelons que le problème que l'on veut résoudre s'énonce comme suit:

$$Min\ Z_1 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=m+1}^{r} \delta_{ij}\, c_{ij}$$

sujet à

$$\sum_{i=1}^{r} x_{ij} - \sum_{i=m+1}^{r} x_{ji} = dj \ ;\ j = m+1,\ldots, r \qquad \text{(A.1)}$$

$$\sum_{j=m+1}^{r} x_{ij} \qquad \leq si \ ;\ i = 1,\ldots, m\ .$$

$$(1-\delta_{ij})\, x_{ij} \qquad = 0 \ ;\ i = 1,\ldots, r\ ;\ j=m+1,\ldots, r\ .$$

$$\sum_{i=1}^{r} \delta_{ij} = 1 \qquad ;\ j=m+1,\ldots, r\ .$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad\qquad ;\ 1 \leq i \leq r\ ;\ m+1 \leq j \leq r$$

$$\delta_{ij} = 0\ ou\ 1 \qquad\qquad 1 \leq i \leq r\ ;\ m+1 \leq j \leq r$$

A.1 Application numérique de l'algorithme SOLREA

Considérons un probème où l'on a trois sources A, B et C et six points de demande 1,2,...,6. Les données pour ce problème sont résumées dans le tableau A.1.

Poste	1	2	3	4	5	6	Disp.
A	10	12	14	9	7	12	100
B	17	15	5	10	14	13	81
C	14	16	20	13	6	12	164
1	∞	5	8	5	2	1	
2	5	∞	7	4	10	7	
3	8	7	∞	5	6	1	
4	5	4	5	∞	3	2	
5	2	10	6	3	∞	4	
6	1	7	1	2	4	∞	
Dem.	20	23	30	35	40	45	

Tableau A.1: Données

L'application de l'algorithme SOLREA nous fournit une solution après 13 itérations.

Le résultat de chaque itération est représenté par un tableau portant le numéro de l'itération.

L'asterix (*) désigne le point de demande qui doit être alimenté par la source considéré à l'itération donnée. Ainsi, à l'itération 1, on peut voir que le point de demande 5 sera alimenté par la source C.

La solution que l'on obtient est représenté par la figure A.1 et a pour valeur 22.

Voici maintenant les tableaux représentant les différentes itérations.

Poste	1	2	3	4	5*	6	Disp.
C	14	16	20	13	6	12	164
Dem.	20	23	30	35	40	45	
Reg.	0	0	0	0	1	0	
Moy.	0	0	0	0	4	0	

itération 1

Poste	1	2	3	4	5	6*	Disp.
C	2	10	6	3	-	4	124
Dem.	20	23	30	35	-	45	
Reg.	8	2	0	6	-	8	
Moy.	0.44	0	0	0	-	0.34	

itération 2

Poste	1	2	3	4	5	6	Disp.
A	10	12	14	9	-	-	100
Dem.	20	23	30	35	-	-	
Reg.	0	0	0	0	-	-	
Moy.	0	0	0	0	-	-	

itération 3

Poste	1	2	3	4	5	6	Disp.
B	17	15	5	10	-	-	81
Dem.	20	23	30	35	-	-	
Reg.	0	0	0	0	-	-	
Moy.	0	0	0	0	-	-	

itération 4

Poste	1*	2	3	4	5	6	Disp.
C	1	7	1	2	-	-	79
Dem.	20	23	30	35	-	-	
Reg.	9	5	4	7	-	-	
Moy.	0.26	0	0	0	-	-	

itération 5

Poste	1	2	3	4	5	6	Disp.
A	-	12	14	9	-	-	100
Dem.	-	23	30	35	-	-	
Reg.	-	0	0	0	-	-	
Moy.	-	0	0	0	-	-	

itération 6

Poste	1	2	3	4	5	6	Disp.
B	-	15	5	10	-	-	81
Dem.	-	23	30	35	-	-	
Reg.	-	0	0	0	-	-	
Moy.	-	0	0	0	-	-	

itération 7

Poste	1	2	3	4*	5	6	Disp.
C	-	5	1	2	-	-	59
Dem.	-	23	30	35	-	-	
Reg.	-	7	4	7	-	-	
Moy.	-	0.43	0	0.43	-	-	

itération 8

Poste	1	2	3	4	5	6	Disp.
A	-	12	14	-	-	-	100
Dem.	-	23	30	-	-	-	
Reg.	-	0	0	-	-	-	
Moy.	-	0	0	-	-	-	

itération 9

Poste	1	2	3*	4	5	6	Disp.
B	-	15	5	-	-	-	81
Dem.	-	23	30	-	-	-	
Reg.	-	0	9	-	-	-	
Moy.	-	0	0.67	-	-	-	

itération 10

Poste	1	2	3	4	5	6	Disp.
A	-	12	-	-	-	-	100
Dem.	-	23	-	-	-	-	
Reg.	-	0	-	-	-	-	
Moy.	-	0	-	-	-	-	

itération 11

Poste	1	2	3	4	5	6	Disp.
B	-	7	-	-	-	-	51
Dem.	-	23	-	-	-	-	
Reg.	-	0	-	-	-	-	
Moy.	-	0	-	-	-	-	

itération 12

Poste	1	2*	3	4	5	6	Disp.
C	-	4	-	-	-	-	24
Dem.	-	23	-	-	-	-	
Reg.	-	3	-	-	-	-	
Moy.	-	1.33	-	-	-	-	

itération 13

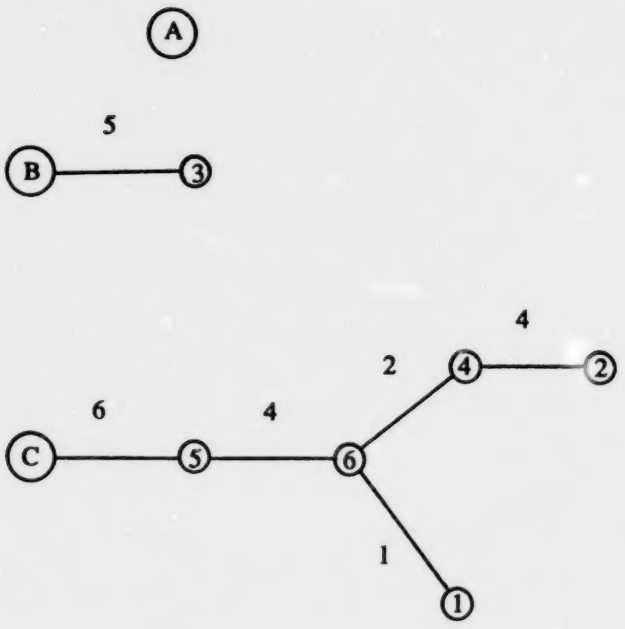


Figure A.1 Solution heuristique

A.2 Algorithme exact

Cet algorithme entre dans la catégorie "Branch and Bound" et consiste donc en la construction d'une arborescence de racine u_0 où aucune affectation n'est spécifiée. A chaque itération, seront créés, à partir d'un noeud pendant non stérilisé (voir définition ci-dessous), deux arcs, l'un de sommet terminal u=(q,k), qu'on appelera sommet de type 1, et qui correspond à $\delta_{qk} = 1$ et l'autre de sommet terminal $\overline{u} = (\overline{q},\overline{k})$ qu'on appelera sommet de type 2, et qui correspond à $\delta_{qk} = 0$. Cette séparation sera accompagnée d'une procédure d'évaluation permettant de calculer une borne inférieure et une borne supérieure pour chacun des noeuds u et $\overline{u}$.

L'algorithme s'arrête quand tous les noeuds pendants sont stérilisés.

Définition A.2.1

Un noeud pendant u_k sera dit stérilisé, si au moins une des conditions suivantes est vérifiée:

i) La borne inférieure $Y^{(k)}$ du noeud u_k est telle que $Y^{(k)} \geq BS$; où BS est une borne supérieure sur la valeur optimale de la fonction économique.

ii) Le chemin P_k, de u_0 à u_k, comporte une affectation de tous les points de charge.

Les trois sections qui suivent seront consacrées aux méthodes de calcul d'une borne inférieure pour, respectivement, la racine u_0, un sommet de type 1 et un sommet de type 2.

Mais, auparavant, remarquons que le problème peut être représenté par un tableau de la forme suivante:

	m+1	m+2	.....	r	Disponibilités
1	c_{1m+1}	c_{1m+2}	.....	c_{1r}	s_1
2	c_{2m+1}	c_{2m+2}	.....	c_{2r}	s_2 Postes
.					
.					
.					
m	c_{mm+1}	c_{mm+2}	.....	c_{mr}	s_m
m+1	---	c_{m+1m+2}	.....	c_{m+1r}	---
.					
.					points de
.					charge
.					
r	c_{rm+1}	c_{rm+1}	.....	---	---
demandes	d_{m+1}	d_{m+2}	.....	d_r	

A.2.1 Calcul d'une borne inférieure pour la racine u_0

Dans cette section, nous montrons que la somme, $V_c^{(0)}$, des plus petits éléments de chaque colonne, plus la somme, $V_l^{(0)}$, des plus petits éléments de certaines lignes, constitue une borne inférieure pour la racine u_0

$$i.e \quad \bar{Z}_1 \geq V_c^{(0)} + V_l^{(0)} .$$

Pour ce faire, considérons les problèmes suivants:

. (Q_1), le problème déduit de (A.1) en remplaçant, dans la fonction économique, c_{ij} par

$c_{ij} - a_j$

où

$$a_j = \min_{1 \leq i \leq r} c_{ij} \; ; \; m+1 \leq j \leq r .$$

. (Q_2), le problème déduit de (A.1) en remplaçant la fonction économique par:

$$Z_{Q_2} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=m+1}^{r} \delta_{ij}(c_{ij} - \bar{\lambda}_i \bar{b}_i) + \sum_{i=m+1}^{r} \sum_{j=m+1}^{r} \delta_{ij} c_{ij}$$

où

$$\bar{b}_i = \min_{m+1 \leq j \leq r} \{c_{ij}\} \; ; \; 1 \leq i \leq m .$$

et $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1 , \ldots , \bar{\lambda}_m)$ est une solution réalisable optimale du problème $(K_{\bar{b}})$ suivant:

$$(K_{\bar{b}}) : \underset{\lambda}{Min} \{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \bar{b}_i : \sum_{i=1}^{m} \lambda_i s_i \geq d \; ; \; \lambda_i = 0 \; ou \; 1, \; 1 \leq i \leq m \}$$

où

$$d = \sum_{j=m+1}^{r} d_j .$$

Remarque

i) (Q_1) s'obtient, à partir de (A.1), en retranchant de chaque colonne son plus petit élément.

ii) Pour obtenir (Q_2), on cherche la combinaison minimale, des plus petits éléments de chaque ligne associée à un poste, de façon que la somme des capacités des postes, correspondants à cette combinaison, satisfasse la demande totale.

iii) Il est évident que les problèmes (Q_1), (Q_2) et (A.1) ont le même ensemble de solutions.

Proposition A.2.1

La valeur de la fonction économique du problème (A.1), correspondant à une solution réalisable donnée, (x, δ), est égale à la valeur de la fonction économique du problème (Q_1) pour la même solution, augmenté de $V_c^{(0)} = \sum_{j=m+1}^{r} a_j$

$$i.e. \quad Z_1(x, \delta) = Z_{Q_1}(x, \delta) + V_c^{(0)}.$$

Preuve

Soit (x, δ) une solution réalisable.

On a alors,

$$Z_1(x, \delta) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=m+1}^{r} \delta_{ij} c_{ij}$$

et

$$Z_{Q_1}(x, \delta) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=m+1}^{r} \delta_{ij} (c_{ij} - a_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=m+1}^{r} \delta_{ij} c_{ij} - \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=m+1}^{r} \delta_{ij} a_j$$

$$= Z_1(x, \delta) - \sum_{j=m+1}^{r} a_j \sum_{i=1}^{r} \delta_{ij}$$

Or

$$\sum_{i=1}^{r} \delta_{ij} = 1 \quad \textit{pour tout } j;\ m+1 \le j \le r\ .$$

D'où

$$Z_{Q_1}(x, \delta) = Z_1(x, \delta) - \sum_{j=m+1}^{r} a_j \qquad \square$$

Avant de continuer, signalons qu'on peut supposer, sans perte de généralité, que $\overline{\lambda}_1 = \overline{\lambda}_2 = \cdots = \overline{\lambda}_p = 1$ et $\overline{\lambda}_{p+1} = \cdots = \overline{\lambda}_m = 0$ avec $1 \le p \le m$.

Ainsi, l'expression de Z_{Q_2} devient:

$$Z_{Q_2} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=m+1}^{r} \delta_{ij}\,(c_{ij} - \overline{b}_i) + \sum_{i=p+1}^{r} \sum_{j=m+1}^{r} \delta_{ij}\, c_{ij}\ .$$

Proposition A.2.2

Soit (x, δ) une solution réalisable et soit $I_\delta = \{i \in [1,p]:\ \sum_{j=m+1}^{r} \delta_{ij} \ge 1\}$. On a alors,

$$Z_1(x, \delta) \ge Z_{Q_2}(x, \delta) + \sum_{i \in I_\delta} \overline{b}_i$$

Preuve

Sans perte de généralité, on peut supposer que $I_\delta = \{1,2,\ldots,k\}$ où $1 \le k \le p$.

On a:

$$Z_{Q_2}(x, \delta) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=m+1}^{r} \delta_{ij}\,(c_{ij} - \overline{b}_i) + \sum_{i=p+1}^{r} \sum_{j=m+1}^{r} \delta_{ij}\, c_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=m+1}^{r} \delta_{ij}\, c_{ij} - \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=m+1}^{r} \delta_{ij}\, \overline{b}_i + \sum_{i=p+1}^{r} \sum_{j=m+1}^{r} \delta_{ij}\, c_{ij}$$

$$= Z_1(x, \delta) - \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=m+1}^{r} \delta_{ij}\, \overline{b}_i$$

or,

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=m+1}^{r} \delta_{ij} \bar{b}_i = \sum_{i=1}^{k} \bar{b}_i \sum_{j=m+1}^{r} \delta_{ij} + \sum_{i=k+1}^{p} \bar{b}_i \sum_{j=m+1}^{r} \delta_{ij}$$

Mais,

$$\sum_{i=k+1}^{p} \bar{b}_i \sum_{j=m+1}^{r} \delta_{ij} = 0 \quad car \quad \sum_{j=m+1}^{r} \delta_{ij} = 0 \quad pour \quad i = k+1,..., p \ .$$

D'autre part,

$$\sum_{j=m+1}^{r} \delta_{ij} \geq 1 \quad pour \quad i=1,..., k$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{k} \bar{b}_i \sum_{j=m+1}^{r} \delta_{ij} \geq \sum_{i=1}^{k} \bar{b}_i$$

et par conséquent

$$Z_{Q_2}(x, \delta) = Z_1(x, \delta) - \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=m+1}^{r} \delta_{ij} \bar{b}_i \leq Z_1(x, \delta) - \sum_{i \in I_\delta} \bar{b}_i \qquad \square$$

Proposition A.2.3

Soit $(\bar{x}, \bar{\delta})$ une solution optimale (réalisable) pour le problème (A.1) et soit $\bar{Z}_1$ la valeur optimale du problème (A.1), alors:

$\bar{Z}_1$ est bornée inférieurement par $\sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \bar{b}_i$

i.e. $\bar{Z}_1 \geq \sum_{i=1}^{p} \bar{b}_i$.

Preuve

On distinguera deux cas: $I_{\bar{\delta}} = [1,p]$ et $I_{\bar{\delta}} \subset [1,p]$.

i- $I_{\bar{\delta}} = [1,p]$

D'après la proposition A.2.2, on a:

$$\overline{Z}_1 \geq Z(\overline{x}, \overline{\delta}) + \sum_{i=1}^{p} \overline{b_i}$$

Or,

$$Z_{Q_2}(\overline{x}, \overline{\delta}) \geq 0$$

D'où,

$$\overline{Z}_1 \geq \sum_{i=1}^{p} \overline{b_i} .$$

ii- $I_{\overline{\delta}} \subset [1,p]$.

Il existe alors k, $1 \leq k < p$ tel que $I_{\overline{\delta}} = [1, k]$.

Dans ce cas, il existe $l_1, l_2, \ldots, l_s \in$ [p+1, m] tels que

$\sum_{j=m+1}^{r} \overline{\delta}_{lj} \geq 1$ pour $1 \leq i \leq s$. (Car sinon la solution $(\overline{x}, \overline{\delta})$ ne serait pas réalisable).

Sans perte de généralité, on peut supposer que $l_i = p+i$ on a alors:

$$\overline{Z}_1 = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=m+1}^{r} \overline{\delta}_{ij} c_{ij} + \sum_{i=p+1}^{r} \sum_{j=m+1}^{r} \overline{\delta}_{ij} c_{ij}$$

Or,

$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=m+1}^{r} \overline{\delta}_{ij} c_{ij} \geq \sum_{i=1}^{k} \overline{b_i}$ (voir preuve de la proposition A.2.2).

Et,

$$\sum_{i=p+1}^{r} \sum_{j=m+1}^{r} \overline{\delta}_{ij} c_{ij} = \sum_{i=p+1}^{p+s} \sum_{j=m+1}^{r} \delta_{ij} c_{ij} + \sum_{i=p+s+1}^{r} \sum_{j=m+1}^{r} \delta_{ij} c_{ij}$$

$$\geq \sum_{i=p+1}^{p+s} \sum_{j=m+1}^{r} \delta_{ij} c_{ij}$$

$$\geq \sum_{i=p+1}^{p+s} \overline{b_i} \quad car \quad \sum_{j=m+1}^{r} \delta_{ij} \geq 1 \text{ pour } i = p+1, \ldots, p+s .$$

D'où,

$$\overline{Z}_1 \geq \sum_{i=1}^{k} \overline{b}_i + \sum_{i=p+1}^{p+A} \overline{b}_i$$

Mais,

$$\sum_{i=1}^{k} \overline{b}_i + \sum_{i=p+1}^{p+s} \overline{b}_i \geq \sum_{i=1}^{p} \overline{b}_i$$

car sinon, la solution

$$\overline{\lambda} = (\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_m) \text{ telle que } \overline{\lambda}_1 = \cdots = \overline{\lambda}_p = 1 \text{ et } \overline{\lambda}_{p+1} = \cdots = \overline{\lambda}_m = 0$$

ne serait pas optimale pour le problème $(K_{\overline{b}})$

Donc

$$\overline{Z}_1 \geq \sum_{i=1}^{p} \overline{b}_i \qquad \square$$

Nous sommes, maintenant, en mesure de trouver une borne inférieure pour la racine u_0.

En effet, d'après la proposition A.2.3, on a

$$\overline{Z}_{Q_1} \geq \sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}\, \tilde{b}_i$$

où

$$\tilde{b}_i = \min_{m+1 \leq j \leq r} \{c_{ij} - a_j\} \; ; \; i = 1, \ldots, m \; .$$

et

$\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_m)$ est une solution optimale réalisable du problème $(K_{\tilde{b}})$.

Or, d'après la proposition A.2.1, on a

$$\overline{Z}_1 = \overline{Z}_{Q_1} + V_c^{(0)}$$

D'où

$$\overline{Z}_1 \geq V_c^{(0)} + \sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i\, \tilde{b}_i$$

Ou encore, en posant:

$$V_l^{(0)} = \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \, b_i$$

on a

$$\bar{Z}_1 \geq V_c^{(0)} + V_l^{(0)} .$$

On peut alors énoncer la proposition.

Proposition A.2.4

La valeur optimale du problème (A.1) est bornée inférieurement par $V_c^{(0)} + V_l^{(0)}$.

$$i.e. \qquad \bar{Z}_1 \geq V_c^{(0)} + V_l^{(0)} .$$

A.2.2 Détermination d'une borne inférieure pour un sommet de type 1

Rappelons, qu'un sommet de type 1 est créé lorsqu'on fixe une variable δ_{kl} à 1 pour un certain k, $1 \leq k \leq m$ et un certain l, $m+1 \leq l \leq r$.

Dans cette section, et par souci de clarté, nous nous limiterons au calcul d'une borne inférieure pour le sommet u_1 de type 1, créé directement à partir de u_0. La généralisation pour les autres sommets du même type est immédiate.

Soit donc $(A'.1)$ le problème restreint, déduit de (A.1), en fixant δ_{kl} à 1. Il est clair qu'une borne inférieure, sur la valeur optimale du problème $(A'.1)$, constitue une borne inférieure pour le sommet u_1.

A.2.2.1 Réduction du problème $(A'.1)$

Soit (Q'_1) le problème déduit de $(A'.1)$ en supprimant les ligne et colonne l et en modifiant la disponibilité et les coûts de la ligne k de la façon suivante:

$$S_k \longleftarrow S_k - d_l .$$

$$c_{kj} \leftarrow \begin{cases} \min\{c_{kj}, c_{lj}\} & si\ d_j \leq S_k - d_l \\ +\infty & si\ d_j > S_k - d_l . \end{cases}$$

Le problème (Q'_1) s'écrit alors:

$$Min\ Z_{Q'_1} = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq l}}^{r} \sum_{\substack{j=m+1 \\ j\neq l}}^{r} \delta_{ij}\, c'_{ij}$$

sujet à

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq l}}^{r} x_{ij} - \sum_{\substack{i=m+1 \\ i\neq l}}^{r} x_{ji} = d_j \; ; \; j \neq l \; , \; j=m+1, \ldots, r$$

$$\sum_{\substack{j=m+1 \\ j\neq l}}^{r} x_{ij} \qquad \leq s_i \; ; \qquad i=1,\ldots,m,\ i\neq k$$

$$\sum_{\substack{j=m+1 \\ j\neq l}}^{r} x_{kj} \qquad \leq s_k - d_l$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq l}}^{r} \delta_{ij} \qquad = 1 \; ; \qquad j\neq l,\ j=m+1,\ldots,\ r$$

$$(1-\delta_{ij})\ x_{ij} = 0 \; ; \; i=1,\ldots,\ r \; ; \; j=m+1,\ldots,\ r \; , \qquad i\neq l,\ j\neq l \; .$$

$$x_{ij} \geq 0 \; , \; \delta_{ij} = 0 \text{ ou } 1 \quad i=1,\ldots,\ r,\ j=m+1,\ldots,\ r \; , \qquad i\neq l,\ j\neq l \; .$$

Où

$$c'_{ij} = c_{ij} \quad pour \quad i\neq k,l \; ; \; j\neq l$$

$$c'_{kj} = \begin{cases} \min\{c_{kj},\ c_{ij}\} & si\ d_j \leq s_k - d_l \\ +\infty & si\ d_j > s_k - d_l \; . \end{cases}$$

Soit enfin, R'_1 et S'_1 les domaines réalisables respectifs des problèmes (A'_1) et (Q'_1) .
On a alors le résultat suivant:

Proposition A.2.5

Il existe une application f surjective de R'_1 sur S'_1 telle que:

$\forall\ (x, \delta) \in R'_1$ on a,

$$Z'_1\ (x, \delta) \geq Z_{Q'_1}\ (f(x, \delta)) + C_{kl}$$

où, Z'_1 et $Z_{Q'_1}$ sont les fonctions économiques des problèmes $(A'.1)$ et (Q'_1), respectivement.

Preuve

Pour tout $(x, \delta) \in R'_1$, soit $f(x, \delta) = (x', \delta')$

où,

$$(x'_{ij}, \delta'_{ij}) = (x_{ij}, \delta_{ij}) \text{ pour } i \neq l, k \; ; \; j \neq l$$

et

$$(x'_{kj}, \delta'_{kj}) = (x_{kj} + x_{lj} \; , \; \delta_{kj} + \delta_{lj}) \; .$$

En remarquant que pour tout $(x, \delta) \in R'_1$ on a, $\delta_{il} = x_{il} = 0$ pour tout i=1,...,r, $i \neq k$, on vérifie facilement que f, telle que définie plus haut, est une application de R'_1 dans S'_1.

De plus, pour tout $(x', \delta') \in S'_1$, il existe $(x, \delta) \in R'_1$ telle que $f(x, \delta) = (x', \delta')$.

En effet:

Soit (x, δ) telle que:

$(x_{ij}, \delta_{ij}) = (x'_{ij}, \delta'_{ij})$ *pour* $i \neq l, k \; ; \; j \neq l$

$(x_{kj}, \delta_{kj}) = (x'_{kj}, \delta'_{kj})$ *pour* $j \neq l$

$(x_{kl}, \delta_{kl}) = (d_l, 1)$

$(x_{lj}, \delta_{lj}) = (0,0)$ *pour* $m + 1 \leq j \leq r$

$(x_{il}, \delta_{il}) = (0,0)$ *pour* $1 \leq i \leq r \; , \; i \neq k \; .$

Alors,

$$(x, \delta) \in R'_1 \text{ et } f(x, \delta) = (x', \delta')$$

ce qui montre que f est surjective.

Il reste à montrer que

$$Z'_1(x, \delta) \geq C_{kl} + Z_{Q'_1}(f(x, \delta)) .$$

Soit

$$(x, \delta) \in R'_1 \text{ et } (x', \delta') = f(x, \delta) .$$

Alors,

$$Z_{Q'_1}(x', \delta') = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{r} \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq l}}^{r} \delta'_{ij} c'_{ij}$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l,k}}^{r} \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq l}} \delta'_{ij} c'_{ij} + \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq l}}^{r} \delta'_{kj} c'_{kj}$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l,k}}^{r} \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq l}}^{r} \delta_{ij} c_{ij} + \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq l}}^{r} \delta'_{kj} c'_{kj}$$

Or

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l,k}}^{r} \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq l}}^{r} \delta_{ij} c_{ij} = Z'_1(x, \delta) - \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq l}}^{r} \delta_{kj} c_{kj} - \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq 1}}^{r} \delta_{lj} c_{jl} - \sum_{i=1}^{r} \delta_{il} c_{il} .$$

Mais,

$$\sum_{i=1}^{r} \delta_{il} c_{il} = c_{kl}$$

D'où

$$Z_{Q'_1}(x', \delta') = Z'_1(x, \delta) - c_{kl} - \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq l}} (\delta_{kj} c_{kj} + \delta_{lj} c_{lj}) + \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq l}} (\delta_{kj} + \delta_{lj}) c'_{kj}$$

i) $c'_{kj} \leq +\infty$ *pour tout* $j \neq l$.

Alors,

$$Z_{Q'_1}(x', \delta') = Z'_1(x,\delta) - c_{kl} - \sum_{j \neq l} \delta_{kj}(c_{kj} - c'_{kj}) - \sum_{j \neq l} \delta_{lj}(c_{lj} - c'_{kj}) .$$

Or

$$c_{kj} - c'_{kj} \geq 0 \quad et \quad c_{lj} - c'_{kj} \geq 0$$

D'où

$$Z_{Q'_1}(x', \delta') \leq Z'_1(x, \delta) - c_{kl} .$$

ii) Il existe j, $m+1 \leq j \leq r$, $j \neq l$ tel que $c'_{kj} = +\infty$.

Soit $J_0 = \{j : c'_{kj} = +\infty\}$

Alors,

pour tout $j \in J_0$ on a $\delta'_{kj} = 0$

D'où

$$\sum_{j \neq l} \delta'_{kj} c'_{kj} = \sum_{\substack{j \neq l \\ j \notin J_0}} \delta'_{kj} c'_{kj}$$

et par conséquent

$$Z_{Q'_1}(x', \delta') = Z'_1(x, \delta) - c_{kl} - A$$

Où

$$A = \sum_{\substack{j \neq l \\ j \notin J_0}} [\delta_{kj}(c_{kj} - c'_{kj}) + \delta_{lj}(c_{lj} - c'_{kj})] + \sum_{\substack{j \neq l \\ j \in J_0}} [\delta_{kj} c_{kj} + \delta_{lj} c_{lj}]$$

Or

$A \geq 0$

Donc

$$Z_{Q'_1}(x', \delta') \leq Z'_1(x, \delta) - c_H \qquad \square$$

A.2.2.2 Détermination d'une borne inférieure

Soit

$$a'_j = \min_{i \neq l} c'_{ij} \; ; \; m+1 \leq j \leq r \; , \; j \neq l \; .$$

$$b'_i = \min_{j \neq l} \{c'_{ij} - a'_j\} \; ; \; i=1,2,\ldots, m \; .$$

$\overline{\lambda} = (\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_m)$ une solution optimale du problème

$$(K_{b'}): \underset{\lambda=0 \text{ ou } 1}{Min} \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i b'_i : \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m} \lambda_i s_i + \lambda_k (s_k - d_l) \geq d - d_l\}$$

On pose:

$$V_c^{(1)} = \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq l}}^{r} a'_j$$

$$V_l^{(1)} = \sum_{i=1}^{m} \overline{\lambda}_i b'_i$$

On a alors la proposition suivante.

Proposition A.2.6

Soit $(\overline{x}, \overline{\delta})$ une solution optimale du problème $(A'.1)$

Alors

$$Z'_1(\bar{x}, \bar{\delta}) \geq Max\{V_c^{(0)} + V_l^{(0)}, V_c^{(1)} + V_l^{(1)} + c_{kl}\}$$

Preuve

On a

$$Z'_1(\bar{x}, \bar{\delta}) \geq c_{kl} + Z_{Q'_1}(f(\bar{x}, \bar{\delta})) \quad \textit{(prop. A.2.5).}$$

Or

$$Z_{Q'_1}(f(\bar{x}, \bar{\delta})) \geq \bar{Z}_{Q'_1} \geq V_c^{(1)} + V_l^{(1)} \quad \textit{(prop. A.2.4).}$$

D'où

$$Z'_1(\bar{x}, \bar{\delta}) \geq c_{kl} + V_c^{(1)} + V_l^{(1)}.$$

De plus,

$$Z'_1(\bar{x}, \bar{\delta}) \geq \bar{Z}_1 \geq V_c^{(0)} + V_l^{(0)}$$

et par conséquent

$$Z_1(\bar{x}, \bar{\delta}) \geq Max\{V_c^{(0)} + V_l^{(0)}, V_c^{(1)} + V_l^{(1)} + c_{kl}\}. \quad \square$$

A.2.3 Détermination d'une borne inférieure pour un sommet de type 2

Comme dans la section précédente, nous nous limiterons au calcul d'une borne inférieure pour le sommet $\bar{u}_1$ de type 2, créé directement à partir de u_0.

Rappelons qu'un sommet, de type 2, est créé lorsqu'on fixe une variable δ_{kl} à zéro (i.e. lorsque l'on interdit l'affectation (k,l), en posant $c_{kl} = +\infty$).

Soit donc $(\bar{A}'.1)$ le problème déduit de (A.1) en posant $c_{kl} = +\infty$ et soient $\bar{V}_c^{(1)}$ et $\bar{V}_l^{(1)}$ les constantes associées au problème $(\bar{A}'.1)$ et définies de la même manière que $V_c^{(0)}$ et $V_l^{(0)}$.

Proposition A.2.7

Soit $\tilde{Z}'_1$ la valeur optimale du problème $(\bar{A}'.1)$. Alors

$$\tilde{Z}'_1 \geq Max \{V_c^{(0)} + V_l^{(0)}, \bar{V}_c^{(1)} + \bar{V}_l^{(1)}\} .$$

Preuve

Soit $(\bar{x}, \bar{\delta})$ une solution optimale du problème $(\bar{A}'.1)$. Alors

$$\tilde{Z}'_1 = \bar{Z}'_1 (\bar{x}, \bar{\delta}) \geq Z_1 (\bar{x}, \bar{\delta}) \geq \bar{Z}_1 \geq V_c^{(0)} + V_l^{(0)} .$$

D'autre part,

$$\tilde{Z}'_1 \geq \bar{V}_c^{(1)} + \bar{V}_l^{(1)}$$

Donc

$$\tilde{Z}'_1 \geq Max \{V_c^{(0)} + V_l^{(0)}, \bar{V}_c^{(1)} + \bar{V}_l^{(1)}\} \qquad \square$$

A.2.4 Algorithme général

A une itération donnée k, nous désignerons par $J^{(k)}$, $d^{(k)}$, $S_i^{(k)}$ et $c^{(k)}$, l'ensemble des points de charge non alimentés, la demande totale non encore satisfaite, la disponibilité résiduelle du poste i et la matrice des coûts.

L'ensemble des postes restant invariant, nous le noterons I.

L'algorithme étant basé principalement sur trois procédures: initialisation, calcul d'une borne inférieure et séparation, nous nous proposons de définir d'abord chacune de ces procédures, pour ensuite, donner l'énoncé général de l'algorithme.

A.2.4.1 Procédure initialisation

Dans cette procédure, il s'agit de déterminer, pour chaque noeud pendant u_k, sommet terminal d'un arc nouvellement créé, les données $J^{(k)}$, $d^{(k)}$, $S_i^{(k)}$ et $c^{(k)}$.

Le calcul de ces données étant dépendant de la nature du sommet auquel elles sont associées, nous définissons une procédure pour chacun des cas suivants:

i) INIT.0 : u_k est la racine ($u_k = u_0$) .

ii) INIT.1 : u_k est un sommet de type 1.

iii) INIT.2 : u_k est un sommet de type 2.

Soit donc I, J, d_j, S_i, C = $[c_{ij}]$ et $d = \sum_{j \in J} d_j$, les données initiales du problème.

On a alors,

INIT.0: Initialisation de la racine u_0

Poser

$J^{(0)} = J \quad ; \quad d^{(0)} = d \quad ; \quad S_i^{(0)} = S_i \; ; \; i \in I \quad ; \quad C^{(0)} = C$

INIT.1: Initialisation d'un sommet u_k de type 1

Soit $J^{(k-1)}$, $d^{(k-1)}$, $S_i^{(k-1)}$ et $C^{(k-1)}$ les données correspondant au prédécesseur immédiat de u_k et supposons que u_k est associé à $\delta_{ql} = 1$.

Alors, poser

$J^{(k)} = J^{(k-1)} - \{l\}$

$d^{(k)} = d^{(k-1)} - d_l$

$S_q^{(k)} = S_q^{(k-1)} - d_l$

$S_i^{(k)} = S_i^{(k-1)} \quad pour \quad i \neq q, \; i \in I$

$c_{qj}^{(k)} = + \infty \quad si \quad dj > S_q^{(k)} \quad pour \quad j \in J^{(k)}$

$c_{qj}^{(k)} = Min \; \{c_{qj}^{(k-1)}, \; c_{lj}^{(k-1)}\} \quad si \quad dj \leq S_q^{(k)} \quad pour \quad j \in J^{(k)}$

$c_{ij}^{(k)} = c_{ij}^{(k-1)} \quad pour \quad i \neq q \; , \; i \in I \cup J^{(k)} \; ; \; j \in J^{(k)} \; .$

Remarque

INIT.1 correspond à la décision d'alimenter le point de charge l à partir du poste q. Cette décision entraîne la suppression du point de charge l, la mise à jour de la demande totale des points de charge non alimentés et de la disponibilité résiduelle du poste q et, enfin, l'ajustement des coûts reliés au poste q.

INIT.2: Initialisation d'un sommet u_k de type 2

Soit $J^{(k-1)}$, $d^{(k-1)}$, $S_i^{(k-1)}$ et $C^{(k-1)}$ les données correspondant au prédécesseur immédiat de u_k et supposons que u_k est associé à $\delta_{ql} = 0$.

Alors, poser

$J^{(k)} = J^{(k-1)}$

$d^{(k)} = d^{(k-1)}$

$S_i^{(k)} = S_i^{(k-1)}$ *pour tout* $i \in I$

$c_{ql}^{(k)} = +\infty$

$c_{ij}^{(k)} = c_{ij}^{(k-1)}$ *pour* $(i,j) \neq (q,l)$.

Remarque

INIT.2 correspond à la décision d'interdire l'alimentation du point de charge l à partir du poste q. Cette décision n'implique qu'une seule modification, à savoir, $c_{ql}^{(k)} = +\infty$.

A.2.4.2 Procédure pour calculer une borne inférieure

Cette procédure utilise les résultats des propositions (A.2.6) et (A.2.7).

Procédure BIF: Calcul d'une borne inférieure $Y^{(k)}$ pour le sommet u_k

Soit $Y^{(k-1)}$ une borne inférieure pour le prédécesseur immédiat de u_k et soit $W^{(k)}$ la valeur du chemin P_k, de u_0 à u_k. ($W^{(k)}$ est égale à la somme des valeurs

attachées aux arcs constituant le chemin P_k .)

i) Déterminer, pour tout $j \in J^{(k)}$,

$$a_j^{(k)} = \underset{i \in I \cup J^{(k)}}{Min}\ c_{ij}^{(k)}$$

$$\text{et poser } V_c^{(k)} = \sum_{j \in J^{(k)}} a_j^{(k)} .$$

ii) Déterminer, pour tout $i \in I$

$$b_i^{(k)} = \underset{j \in J^{(k)}}{Min}\ \{c_{ij}^{(k)} - a_j^{(k)}\}$$

iii) Résoudre le problème

$$(K):\ \underset{\lambda}{Min}\ \{\sum_{i \in I} b_i^{(k)}\, \lambda_i : \sum_{i \in i} S_i^{(k)}\, \lambda_i \geq d^{(k)}\ ;\ \lambda_i = 0 \text{ ou } 1,\ i \in I\}$$

Soit $\overline{\lambda} = (\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_m)$ une solution optimale du problème (K).

Alors, poser

$$V_l^{(k)} = \sum_{i \in I} b_i^{(k)}\, \overline{\lambda}_i$$

et

$$V^{(k)} = V_c^{(k)} + V_l^{(k)}$$

iv) Poser $Y^{(k)} = Max\ \{Y^{(k-1)},\ V^{(k)} + W^{(k)}\}$

$Y^{(k)}$ est une borne inférieure pour u_k.

A.2.4.3 Procédure SEP.: Séparation et évaluation des arcs

Supposons qu'on est "branché" sur le noeud de u_k, auquel les procédures INIT. et BIF. ont été appliquées. Pour déterminer la variable δ_{ql}, relativement à laquelle la séparation sera effectuée, nous identifierons, dans un premier temps, l'ensemble des variables qui ont servi au calcul de la borne inférieure de u_k puis, nous calculerons, pour chacune de ces variables, une pénalité. La séparation s'effectuera

alors, relativement à la variable qui aura la plus grande pénalité.

Formellement, la procédure s'énonce comme suit:

Soit

$$G^{(k)} = [g_{ij}^{(k)}]\ i \in I \cup J^{(k)},\ j \in J^{(k)}$$

où

$$g_{ij}^{(k)} = c_{ij}^{(k)} - a_j^{(k)} - \bar{\lambda}_i\, \bar{b}_i^{(k)}\ ,\ pour\ i \in I;\ j \in J^{(k)}$$

et

$$g_{ij}^{(k)} = c_{ij}^{(k)} - a_j^{(k)}\ ,\ pour\ i \in J^{(k)}\ ;\ j \in J^{(k)}$$

et soit

$$H^{(k)} = \{(i,j) \in I \times J^{(k)} : g_{ij}^{(k)} = 0\}$$

i) Calculer, pour tout $(i,j) \in H^{(k)}$,

$$R_{ij}^{(k)} = \underset{s \in I-\{i\}}{Min}\ g_{sj}^{(k)}\ ,$$

puis, déterminer (q,l) tel que

$$R_{ql}^{(k)} = \underset{(i,j) \in H^{(k)}}{Max}\ R_{ij}^{(k)}\ .$$

ii) Séparer relativement à la variable δ_{ql}. Deux arcs $A^{(k)}$ et $\bar{A}^{(k)}$ sont alors créés à partir de u_k.

iii) Donner la valeur C_{ql} à l'arc $A^{(k)}$ et la valeur zéro à l'arc $\bar{A}^{(k)}$.

A.2.4 Algorithme général

Etape 0: Initialistion

Initialiser la racine u_0 par la procédure INIT.0.

Calculer $V^{(0)}$ par i- ii- et iii- de la procédure BIF et poser $Y^{(0)} = V^{(0)}$.

Poser $BS = \overline{Z}$, où $\overline{Z}$ est la valeur de la fonction économique donnée par l'algorithme SOLREA.

Etape 1: Stérilisation

Si $Y^{(k)} > BS$ (u_k est stérilisé), alors poser $Y^{(k)} = + \infty$ et aller à l'étape 3.

Si $Y^{(k)} \leq BS$ et $J^{(k)} = \phi$ (u_k est stérilisé), alors poser $BS = Y^{(k)}$ et aller à l'étape 3.

Si $Y^{(k)} \leq BS$ et $J^{(k)} \neq \phi$, alors aller à l'étape 2.

Etape 2: Séparation et branchement

Séparer relativement à la variable δ_{ql}, donnée par la procédure SEP.

Brancher sur le noeud de type 1, (q,l), et aller à l'étape 4.

Etape 3: Choix d'un noeud pour se brancher

Si tous les noeuds pendants sont stérilisés, alors aller à l'étape 6.

Sinon, brancher sur le dernier noeud pendant, u, crée et non stérilisé.

Si u est un noeud de type 2, alors aller à l'étape 5.

Etape 4: Initialisation et évaluation d'un noeud u_k de type 1

Initialiser u_k par la procédure INIT.1.

Calculer $Y^{(k)}$ par la procédure BIF.

Aller à l'étape 1.

Etape 5: Initialisation et évaluation d'un noeud u_k de type 2

Initialiser u_k par la procédure INIT.2

Calculer $Y^{(k)}$ par la procédure BIF.

Aller à l'étape 1.

Etape 6: Arrêt

Terminer. La (ou les) solution(s) donnant $Y^{(k)} = BS$ est (ou sont) optimale(s).

A.2.5 Exemple

Reprenons l'exemple de la section A.1.

En prenant comme borne supérieure la valeur trouvée par l'algorithme SOLREA (i.e BS=22), l'arbre que l'on obtient est représenté par la figure A.2. Les nombres au-dessus des noeuds désignant leur borne inférieure.

Ainsi, une solution optimale de valeur 20 a été identifié après l'exploration de 28 branches.

Cette solution est représentée à la figure A.3.

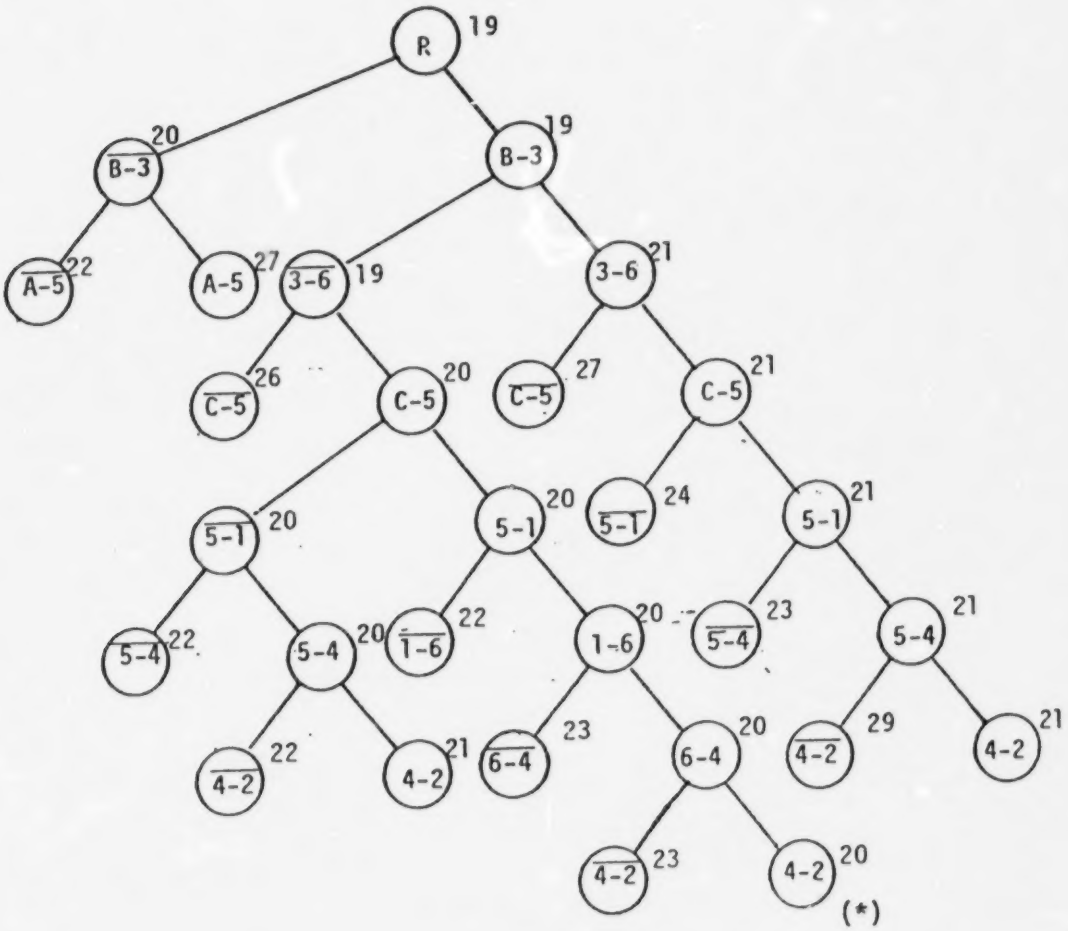


Figure A.2 Arbre de recherche

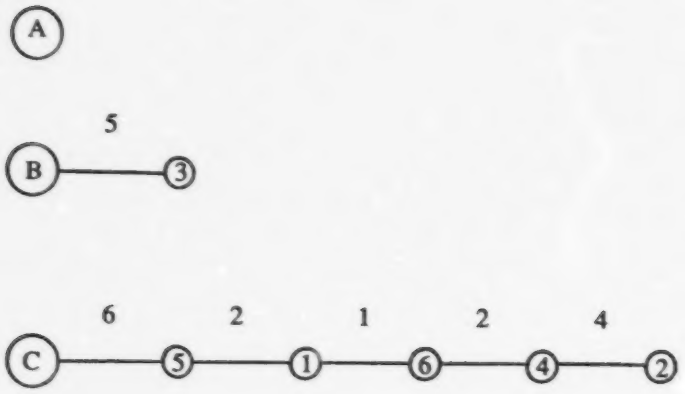


Figure A.3 Solution optimale

ANNEXE B

ANNEXE B

Données pour les exemples numériques

Cette annexe contient les données pour les exemples 1 et 2 traités dans le chapitre VII.

Les coûts d'entretien d'un équipement ont été fixés à 3% de son coût d'installation.

B.1 Données pour l'exemple 1

Les données utilisées pour l'exemple 1 sont résumés dans les tableaux B.1 à B.5.

Tableau B.1: indique les distances, en Km, entre deux points du réseau.

Tableau B.2: spécifie les demandes des points de charge pour les périodes t = 0, 1, 2.

Tableau B.3: donne les coûts (en millier de dollars) ainsi que les capacités en (KVA) des transformateurs.

Tableau B.4: donne les coûts (en millier de dollars) ainsi que les caractéristiques des conducteurs.

Tableau B.5: indique le coût des régulateurs et des pertes de puissance dans une ligne.

Poste	1	2	3	4	5	6	7	8
A	15	8	-	-	-	-	-	-
B	-	14	21	-	-	-	-	-
1	-	12	-	12	-	22	-	-
2	12	-	-	17	-	-	-	-
3	-	-	-	11	11	-	-	16
4	12	17	11	-	-	13	12	-
5	-	-	11	-	-	-	10	-
6	22	-	-	13	-	-	7	-
7	-	-	-	12	10	7	-	16
8	-	-	16	-	-	-	16	-

Tableau B.1: Distances

Pt. de charge	t = 0	t=1	t=2
1	2500	2500	2513
2	2014	2023	2100
3	1012	1122	1238
4	976	982	899
5	668	652	673
6	120	345	367
7	223	221	238
8	164	189	219

Tableau B.2: Demandes

	t = 0	t=1	t=2	Capacité
C_1	800	850	900	22500
C_2	1800	2400	2800	47000

Tableau B.3: Coûts et capacités des transformateurs

	t = 0	t=1	t=2	Capacité max.	R_ω	X_ω
ω_1	30	32	34	3753	0.56	0.51
ω_2	35	38	40	8660	0.13	0.39

Tableau B.4: Coût-capacité-réactance et résistance des conducteurs

	t = 0	t=1	t=2
Régulateur	73	76	78
Perte de puiss.	0.85	1.00	1.30

Tableau B.5: Coûts-régulateurs et pertes puissances

B.2 Données pour l'exemple 2

La figure B.1 donne une représentation du réseau considéré alors que les données sont résumées dans les tableaux B.6 à B.10.

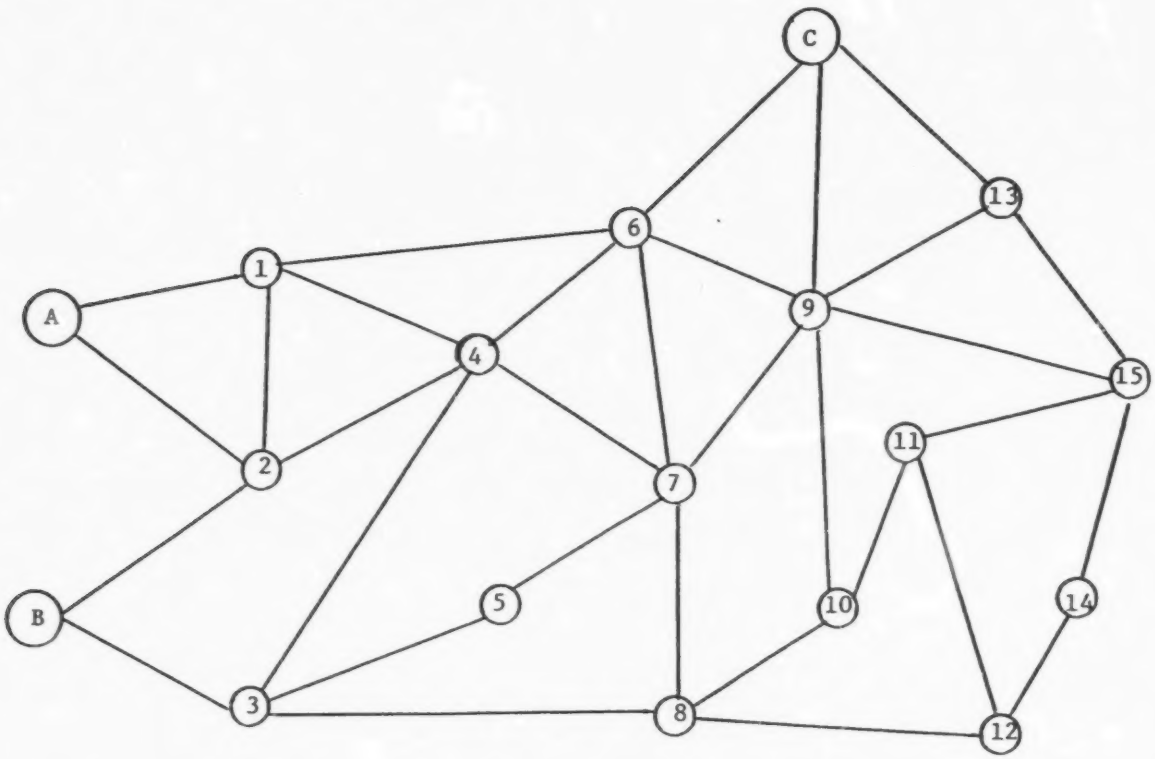


Figure B.1: Réseau des arcs admissibles

Poste	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	15	8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
B	-	14	21	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
C	-	-	-	-	-	12	-	-	10	-	-	-	15	-	-
1	-	12	-	12	-	22	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	12	-	-	17	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	-	-	-	11	11	-	-	16	-	-	-	-	-	-	-
4	12	17	11	-	-	13	12	-	-	-	-	-	-	-	-
5	-	-	11	-	-	-	10	-	-	-	-	-	-	-	-
6	22	-	-	13	-	-	7	-	8	-	-	-	-	-	-
7	-	-	-	12	10	7	-	16	13	-	-	-	-	-	-
8	-	-	16	-	-	-	16	-	-	10	-	9	-	-	-
9	-	-	-	-	-	8	13	-	-	16	-	-	13	-	-
10	-	-	-	-	-	-	-	10	16	-	12	-	-	-	-
11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	12	-	-	6	8	-
12	-	-	-	-	-	-	-	9	-	-	-	-	-	9	-
13	-	-	-	-	-	-	-	-	13	-	6	-	-	-	14
14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8	9	-	-	13
15	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	14	13	-

Tableau B.6: Distances

Pt. de charge	t = 0	t=1	t=2	t=3
1	2500	2500	2513	2533
2	2014	2023	2100	2218
3	1012	1122	1238	1422
4	976	982	899	984
5	668	652	673	692
6	120	345	367	494
7	223	221	238	356
8	164	189	219	352
9	839	851	872	951
10	571	634	721	754
11	642	636	701	775
12	423	500	508	597
13	1035	1041	1059	1148
14	701	689	672	782
15	932	958	1031	1128

Tableau B.7: Demandes

	t = 0	t=1	t=2	t=3	Capacité
C_1	800	850	900	950	22500
C_2	1800	2400	2800	3000	47000

Tableau B.8: Coûts et capacités des transformateurs

	t = 0	t=1	t=2	t=3	Capacité max.	R_ω	X_ω
ω_1	30	32	34	40	6423	0.19	0.42
ω_2	35	38	40	42	8660	0.13	0.39

Tableau B.9: Coût-capacité-réactance et résistance des conducteurs

	t = 0	t=1	t=2	t=3
Régulateur	73	76	78	80
Perte de puiss.	0.85	1.00	1.30	1.40

Tableau B.10: Coûts-régulateurs et pertes puissances

ANNEXE C

ANNEXE C

Le but de cette annexe est de préciser, de façon élémentaire certaines notions d'électrotechnique auxquelles nous avons fait référence dans cette thèse.

Rappelons tout d'abord, que dans les circuits à courant alternatif dont les formes d'onde sont sinusoidales, on distingue trois types de puissance.

i. La puissance active, P, qui représente la puissance dissipée dans une résistance et qui nécessite donc une consommation d'énergie électrique.

ii. La puissance réactive, Q, qui représente la puissance dissipée dans une bobine ou un condensateur et qui ne dépense donc aucune énergie.

iii. La puissance apparente, S, qui représente la puissance totale absorbée par une charge ou débitée par une source.
S s'exprime en fonction de P et Q par la relation $S=\sqrt{P^2 + Q^2}$.

La figure C.1 donne une représentation schématique de P, Q et S.

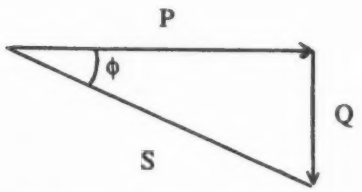


Figure C.1: Puissances, active, réactive et apparente

Le pourcentage de la puissance apparente qui est active est appelé facteur de puissance.

On a donc,

$$\text{facteur de puissance} = \cos\phi = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

Généralement, dans un réseau de distribution, on s'arrange pour que le facteur de puissance ait une valeur déterminée afin de réguler la tension et la puissance réactive. Cela se fait en installant des condensateurs en certains points du réseau.

Le terme impédance englobe toutes les sortes d'opposition d'un circuit au passage d'un courant alternatif, y compris la résistance d'un élément chauffant, la réactance inductive d'une bobine et la réactance capacitive d'un condensateur. L'impédance s'exprime donc en fonction de la résistance et de la réactance.

La chute de tension dans une ligne d'alimentation s'exprime en fonction de la puissance apparente, de l'impédance et de la longueur de la ligne. Plus précisément on a:

$$V_i - V_j = \frac{R_\omega \cos\phi + X_\omega Sin\,\phi}{\sqrt{3}V_N}\, l_{ij}\, x_{ij}$$

où

V_i, V_j et V_N représentent la tension en bout de ligne, la tension en fin de ligne et la tension nominale, l_{ij} représente la longueur de la ligne R_ω, X_ω et x_{ij} représentent respectivement la résistance, la réactance et la puissance apparente.

De même, la puissance perdue dans une ligne s'exprime en fonction de l'impédance, Z et du carré du courant, I, dans la ligne, i.e. qu'elle est de la forme I^2Z.

Ainsi, en explicitant I et Z cette perte de puissance peut s'écrire

$$PP = \frac{R_\omega \cos\phi + X_\omega Sin\,\phi}{V_N^2}\, l_{ij}\, (x_{ij})^2 .$$

BIBLIOGRAPHIE

Adams, R.N. et M.A. Laughton, "Optimal Planning of Power Networks Using Mixed-Integer Programming", Proc. IEE, Vol. 121, No. 2, février 1974.

Assad, A., "Alternative Lagrangean Relaxations for Quadratic Integer Programs". Working Paper, Series MS/S 85-038, University of Maryland, nov. 1985.

Balas, E. et Martin, C.H., "Pivot and Complement - A Heuristique for 0-1 Programming", Management Science, Vol. 26, no. 1, janvier 1980.

Benders, J.F., "Partioning Procedures for Solving Mixed-Variables Programming Problems", Numeristhe Mathematik, Vol. 4, 1962.

Blanchard, M., "Evaluation de la fiabilité des réseaux de distribution", Mémoire de maîtrise, Département d'informatique et de recherche opérationnelle, Université de Montréal, 1981.

Crawford, D.M. et S.B. Holt Jr., "A Mathematical Optimization Technique for Locating and sizing distribution substations and deriving their optimal service areas", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-94, no. 2, mars-avril 1975.

Dantzig, G.B., "Linear Programming and Extensions", Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963.

Dodu, J.C., "Modèle dynamique d'optimisation à long terme d'un réseau de transport d'énergie électrique", EDF, Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Série B, Réseaux Electriques, Matériels Electriques no. 4, 1980.

El-Kady, M.A., "Computer-aided Planning of Distribution substation and Primary Feeders", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-103, no. 6, juin 1984.

Fawzi, T.H., Ali, K.F. et El-Sobki, S.M., "Routing Optimization of Primary Rural Distribution Feeders", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-101, no. 5, mai 1982.

Fawzi, T.H., Ali, K.F. et El-Sobki, S.M., "A New Planning Model for Distribution Systems", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-102, No. 9, septembre 1983.

Fletcher, R., "Practical Methods of Optimization", John Wiley & Sons, a Wiley-Interscience Publication, Vol. 2, 1981.

Geoffrion, A.M., "Elements of Large-Scale Mathematical Programming", Management Science, Vol. 16, no. 11, 1970.

Geoffrion, A.M., "Duality in Nonlinear Programming: A Simplified Application-Oriented Development", SIAM Review, Vol. 13, no. 1, 1971.

Geoffrion, A.M., "Generalized Benders Decomposition", Journal of Optimization Theory and Applications", Vol. 10, no. 4, 1972.

Gonen, T. et Foote, B.L., "Distribution-System Planning Using Mixed-Integer Programming", IEE Proc., Vol. 128, Pt. C., no. 2, mars 1981.

Gonen, T. et Thompson, J.C., "Computerized Interactive Model Approach to Electrical Distribution System Planning", International Journal of Electrical Power and Energie Systems, Vol. 6, no. 1, janvier 1984.

Gonen, T. et Ramirez-Rosado, I.J., "Optimal Expansion of Power Distribution Systems", Presented at the IASFED International Conference on Applied Simulation and Modeling, Montreal, Canada, juin 3-5, 1985.

Gonen, T., "Electric Power Distribution System Engineering", Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1986.

Hindi, K.S. et A. Brameller, "Design of Low-Voltage Distribution Networks: A Mathematical Programming Method", Proc. IEEE, Vol. 124, no. 1, janvier 1977.

Kennington, J. et Unger, E., "A New Branch-and-Bound Algorithm for the Fixed Charge Transportation Problem", Management Science, Vol. 22, no. 10, juin 1976.

Kennington, S.L. et R.V. Helgason, "Algorithms for Network Programming", John Wiley and Sons, N.Y., 1980.

Luenberger, D.G., "Linear and Nonlinear Programming", Second Edition, Addison-Wesley Publishing Company, 1984.

Marsten, R.E., "The Design of the XMP Linear Programming Library, ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 7, no. 4, décembre, 1981.

Marsten, R.E. et Morin, T.L., "A Hybrid Approach to Discrete Mathematical Programming", Mathematical Programming, Vol. 10, no. 1, janvier, 1978.

Masud, E., "Research in Load Forecasting and Distribution Planning", Electric Power Research Institute, Report El-1198, Palo Alto, décembre, 1979.

Murtagh, B.A., "Advanced Linear Programming: Computation and Practice", Mc Graw-Hill International Book Company, New York, 1981.

Minoux, M., "Programmation Mathématique", Dunod, Paris, 1984.

Ponnavaikko, M. et Prakasa Rao, M., "Optimal Distribution System Planning", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-100, No. 6, June 81.

Reid, J.K., "A Sparsity-Exploiting Variant of the Bartels - Golub Decomposition for Linear Programming Bases", Mathematical Programming, Vol. 24, no. 1, septembre, 1982.

Sakarovich, M., "Optimisation combinatoire, Méthodes mathématiques et algorithmes", Hermann, Paris, 1984.

Shapiro, J.F., "A Note on Mode Aggregation and Benders Decomposition", Mathematical Programming, Vol. 29, no. 1, 1984.

Simonnard, M., "Programmation linéaire", Vol. 2, Dunod, Paris, 1973.

Singhal, J., "Fixed Order Branch-and-Bound Methods for Mixed-Integer Programming", Ph.D. Dissertation, Department of Management Information Systems, University of Arizona, Tucson, AZ 95721, janvier, 1982.

Suhl, U.H., "Solving Large-Scale Mixed-Integer Programs with Fixed Charge Variables", Mathematical Programming, Vol. 32, 1985.

Sun, D.I., Farris, J.R., Côté, P.J., Shoults, R.P. et Chem, M.S., "Optimal Distribution Substation and Primary Feeder Planning Via the Fixed Charge Network Formulation", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-101, no. 3, mars 1982.

Thompson, G.L. et Wall, D.I. "A Branch-and-Bound Model for Choosing Optimal Substation", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-100, no. 5, May 1981.

Wall, D.L., Thompson, G.L. et Northcote-Green, J.E.d., "An Optimization Model for Planning Radial Distribution Networks", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-98, no. 3, mai-juin 1979.

Willis, H.L. et Aanstoos, J.V., "Some Unique Signal Processing Applications in Power System Planning", IEEE Tans. ASSP, décembre 1979.

Willis, H.L. et Northcote-Green, J.E.D., "Comparison of Several Computerized Distribution Planning Methods", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-104, No. 1, janvier 1985.

Wildi, T., "Electrotechnique", Les Presses de l'Université Laval, Québec, 1978.

Remerciements

Je voudrais exprimer ma gratitude aux professeurs Jacques Ferland et Robert Cléroux pour avoir accepté la direction de mes travaux. Je les remercie pour l'aide morale et matérielle qu'ils m'ont toujours apportée. Les conseils et la confiance qu'ils m'ont témoignés ont été indispensables à l'élaboration de cette thèse.

Je remercie Alain Lavoie et Brigitte Rioux qui ont programmé les différents algorithmes utilisés dans cette thèse.

Je tiens à remercier Hélène Collerette qui, avec talent et toujours le sourire, a accompli cet excellent travail de dactylographie.

Mes remerciements vont également à tous mes amis du laboratoire d'optimisation et plus particulièrement Charles et Yves.

Je remercie finalement mon amie Hafida pour ses encouragements.